

Votes étranges et paradoxaux

JEAN-PAUL DELAHAYE

Manipulation d'informations confidentielles lors des opérations de vote.

Condorcet, illustre encyclopédiste et démocrate convaincu du *Siècle des lumières*, a montré qu'à des élections à la majorité simple A peut battre B (dans un vote opposant A à B), B peut battre C (dans un vote opposant B à C) et C peut battre A (dans un vote opposant A à C). La situation la plus simple créant ce paradoxe ne fait intervenir que trois électeurs, le premier ayant pour ordre de préférence A B C, le second B C A et le troisième C A B. Comment être juste en matière électorale ? s'interrogeait Condorcet.

Notre intuition d'électeur est souvent mise en défaut. Certains paradoxes naissent de l'arithmétique des systèmes de votes, que nous maîtrisons mal. D'autres font intervenir la manipulation d'informations confidentielles qui autorise des opérations imprévues ou même à première vue impossibles. Les trois exemples qui suivent illustrent les difficultés de la démocratie : pour vous donner la possibilité de jouer, nous les présentons sous forme d'énigmes.

1. À UN LOGICIEN RIEN D'IMPOSSIBLE

Une assemblée composée d'un nombre impair de logiciens a été capturée par le *grand méchant logicien* qui veut les enrôler dans sa secte. Il leur laisse une chance d'échapper à l'embrigadement. Il dessine dans le dos de chacun d'eux une croix noire ou une croix rouge en procédant au hasard (il s'aide d'une pièce de monnaie qu'il jette en cachette). Chaque logicien voit les croix dessinées sur le dos des autres logiciens, mais ne voit pas celle qu'il porte. Aucune communication n'est permise entre les logiciens. Un scrutin est organisé, et chaque logicien vote pour indiquer s'il pense qu'il y a un nombre pair de croix rouges au total, ou un nombre impair de croix rouges au total. L'abstention n'est évidemment pas permise.

Le *grand méchant logicien* comptabilise les réponses et considère la réponse

majoritaire (il y en a une, puisque le nombre de logiciens capturés est impair). Si le vote majoritaire est correct, les logiciens sont libérés et peuvent aller s'amuser à traiter toutes les énigmes et paradoxes qu'ils trouvent intéressants ; sinon, ils sont condamnés à servir d'esclaves au *grand méchant logicien*, qui les oblige à trouver des applications à la «logique planaire» inventée par lui et qu'il considère comme la trouvaille du siècle.

Chaque logicien se dit : «Puisque la parité du nombre total de croix rouges dépend de celle que j'ai dans le dos, qui a été tirée au hasard, je ne peux rien faire de mieux que voter au hasard. Il en est de même de tous les autres logiciens, et donc globalement nous ne pouvons rien espérer de mieux qu'être libérés une fois sur deux.»

Aussi étonnant que cela paraisse, il existe une méthode de vote que les logiciens peuvent deviner et appliquer et qui leur permettra d'être libérés dans bien plus de la moitié des cas. Quelle est cette méthode ?

Solution

Imaginons que tous les logiciens adoptent la règle suivante :

«Je suppose que j'ai dans le dos une croix de la couleur majoritairement présente devant moi et je vote conformément à la parité de ce décompte. Si je vois sur le dos des autres logiciens autant de croix noires que de croix rouges, je vote sur la parité en faisant l'hypothèse que j'ai dans le dos une croix rouge.»

Pour analyser l'effet d'une telle méthode, distinguons trois cas.

Cas 1. Si l'écart entre le nombre de croix rouges et le nombre de croix noires est supérieur à un (par exemple, six rouges et trois noires), alors les logiciens font en majorité une hypothèse correcte et donc trouvent la bonne réponse. Le vote majoritaire est alors correct et les logiciens sont libérés.

Cas 2. Si l'écart entre le nombre de croix rouges et le nombre de croix noires est de un en faveur des rouges (par

exemple, cinq rouges et quatre noires), alors d'une part tous les porteurs de croix noires (qui voient plus de rouges que de noires) votent faussement, puisqu'ils font l'hypothèse fautive qu'ils portent une croix rouge ; d'autre part, tous les porteurs de croix rouges, qui voient autant de rouges que de noires, votent correctement (puisque, dans un tel cas, ils font l'hypothèse qu'ils portent une croix rouge). Les rouges étant majoritaires, le vote est majoritairement correct et les logiciens sont libérés.

Cas 3. Si l'écart entre le nombre de croix rouges et le nombre de croix noires est de un en faveur des noires (par exemple, quatre rouges et cinq noires), alors tous les porteurs de croix rouges (qui voient plus de noires que de rouges) votent faussement (ils font une mauvaise hypothèse), ainsi que tous les porteurs de croix noires qui voient autant de rouges que de noires (et qui font injustement l'hypothèse qu'ils portent une croix rouge). Donc le vote est erroné (à 100 pour cent). C'est le seul cas où le vote est erroné. Les cas 2 et 3 se compensent et, dans la majorité des situations (grâce au cas 1), les votes des logiciens sont corrects.

Pour évaluer plus précisément le nombre de cas où le vote sera malheureux, considérons le nombre de logiciens m . Ce nombre peut s'écrire $m = 2n + 1$ (car m est impair). Le nombre de cas où le vote est incorrect est le nombre de cas où il y a n croix rouges et $n + 1$ croix noires. Ce nombre est précisément $(2n + 1)!/[n!(n + 1)!]$ (nombre de façons de choisir n éléments parmi $2n + 1$). Il y a 2^m cas possibles au total (deux façons de peindre la croix du premier logicien, deux façons de peindre la croix du deuxième logicien, etc.). Les résultats pour 3, 5, 7, 9, 15 et 25 logiciens sont donnés sur la figure 2.

Plus le nombre de logiciens est grand, meilleure est la méthode, et d'ailleurs on montre que, lorsque m tend vers l'infini, le rapport du nombre de cas défavorables sur le nombre total de cas tend vers zéro.

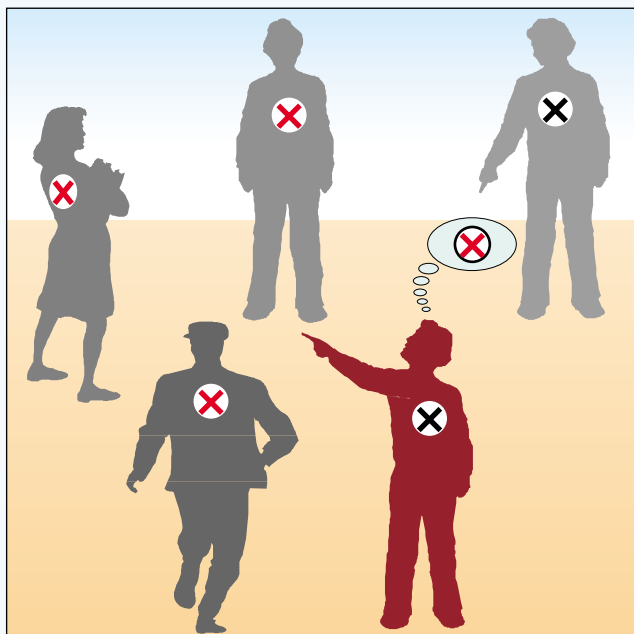
On peut critiquer cette solution en remarquant que les logiciens, s'ils n'ont pas pu s'entendre avant l'épreuve et aussi intelligents soient-ils, n'ont pas de raisons d'adopter tous la même stratégie qui donne un rôle particulier au rouge par rapport au noir. Il est plus raisonnable de penser que la moitié des logiciens à peu près adopte la méthode :

A. «Si je vois devant moi autant de croix noires que de croix rouges, je vote en faisant l'hypothèse que j'ai dans le dos une croix rouge. Sinon, je suppose que j'ai dans le dos une croix de la couleur majoritairement présente devant moi et je vote conformément à cette hypo-

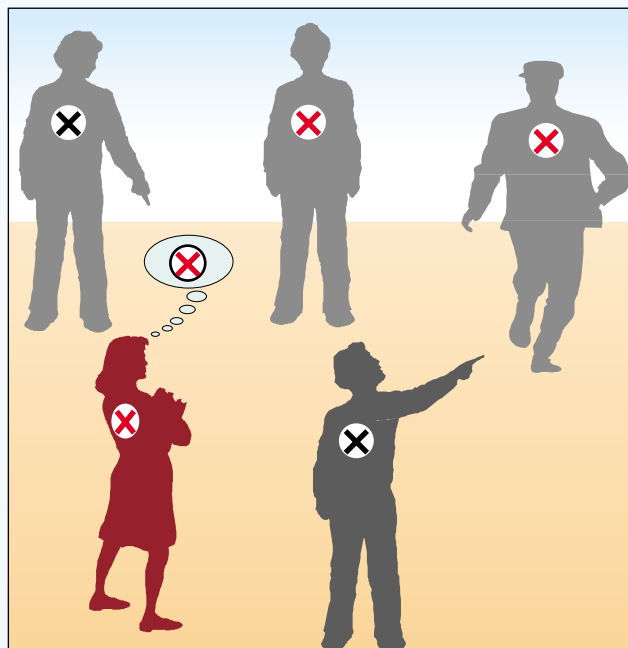
1. LE PROBLÈME DES LOGICIENS

Chaque logicien ignore s'il porte une croix rouge ou noire dans le dos. Les croix ont été choisies au hasard. Chaque logicien doit voter pour indiquer s'il pense que le nombre total de croix rouges est pair ou impair. La réponse majoritaire peut être bonne ou fautive. Si elle est bonne, tous les logiciens sont libérés ; sinon, ils restent emprisonnés.

Est-il possible pour les logiciens de voter de telle façon que plus d'une fois sur deux ils soient libérés ? Oui, en appliquant la règle détaillée ci-dessous.



Je vote en faisant l'hypothèse que j'ai dans le dos une croix de la couleur majoritairement présente, ici une croix de couleur rouge (ici, je me trompe).



Si je vois devant moi autant de croix noires que de croix rouges, je vote en faisant l'hypothèse que j'ai dans le dos une croix rouge (ici, j'ai raison).

- a) Dans 1 cas sur 32, toutes les croix sont rouges. Tous les votes individuels sont corrects. Le vote majoritaire est correct. Au total, 5 votes corrects.
- b) Dans 5 cas sur 32, il y a 1 croix noire et 4 croix rouges. Chacun de ces cas donne 4 votes corrects et 1 vote incorrect. Le vote majoritaire est correct dans les 5 cas. Parmi les 25 votes individuels, 20 votes sont corrects et 5 sont incorrects.
- c) Dans 10 cas sur 32, il y a 2 croix noires et 3 croix rouges. Chacun de ces cas donne 3 votes corrects et 2 votes incorrects. Le vote majoritaire est correct dans les 10 cas. Parmi les 50 votes individuels, 30 votes sont corrects et 20 sont incorrects.
- d) Dans 10 cas sur 32, il y a 3 croix noires et 2 croix rouges. Chacun de ces cas donne 5 votes incorrects. Le vote majoritaire est incorrect dans les 10 cas. Les 50 votes individuels sont incorrects.
- e) Dans 5 cas sur 32, il y a 1 croix rouge et 4 croix noires. Chacun de ces cas donne 4 votes corrects et 1 vote incorrect. Le vote majoritaire est correct dans les 5 cas. Parmi les 25 votes individuels, 20 votes sont corrects et 5 sont incorrects.
- f) Dans 1 cas sur 32, toutes les croix sont noires. Tous les votes individuels sont corrects. Le vote majoritaire est correct. Au total, 5 votes corrects.

COULEUR DÉDUITE	COULEUR RÉELLE	COULEURS VUES	
⊗	⊗	⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗	5 votes corrects
⊗	⊗	⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗	4 votes corrects
⊗	⊗	⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗	1 vote incorrect
⊗	⊗	⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗	3 votes corrects
⊗	⊗	⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗	2 votes incorrects
⊗	⊗	⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗	3 votes incorrects
⊗	⊗	⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗	2 votes incorrects
⊗	⊗	⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗	4 votes corrects
⊗	⊗	⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗	1 vote incorrect
⊗	⊗	⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗	5 votes corrects

Sur les $32 \times 5 = 160$ votes exprimés dans les 32 cas possibles, on a 80 votes corrects, 80 votes incorrects, mais, sur les 32 votes, le vote majoritaire est incorrect dans seulement 10 cas.