

tent confidentiels (autant que lors d'un vote à bulletins secrets avec une urne s'il avait été possible). Chacune d'entre elles doit pouvoir calculer le résultat du vote. Comment doivent-elles s'y prendre? On fera l'hypothèse que les cinq personnes, parfaitement honnêtes, ne tentent pas de tricher et qu'elles savent toujours qui leur a envoyé un message (aucun anonymat n'est donc possible dans les communications).

Solution

Chacune des cinq personnes A, B, C, D et E choisit un nombre entier (respectivement a , b , c , d , et e) qu'elle prend multiple de 6 si elle veut voter OUI ou multiple de 6 plus 1 (comme $31 = 6 \times 5 + 1$) si elle veut voter NON. La somme $N = a + b + c + d + e$ sera donc de la forme «un multiple de 6, plus le nombre de voix NON» (par exemple, $604 = 6 \times 100 + 4$ signifie «4 NON»).

Chaque participant choisit maintenant une décomposition arbitraire de son nombre sous la forme d'une somme de cinq nombres entiers :

$$a = a1 + a2 + a3 + a4 + a5,$$

$$b = b1 + b2 + b3 + b4 + b5, \text{ etc.}$$

Chacun communique aux quatre autres un des quatre termes de sa décomposition. Par exemple, A recevra les nombres $b1$, $c1$, $d1$ et $e1$, B recevra $a2$, $c2$, $d2$ et $e2$, etc. La personne A additionne le nombre $a1$ qu'elle n'a pas communiqué, aux quatre qu'elle a reçu et obtient $N1 = a1 + b1 + c1 + d1 + e1$; la personne B additionne $a2 + b2 + c2 + d2 + e2 = N2$, etc. Remarquez que $N1 + N2 + N3 + N4 + N5 = a + b + c + d + e = N$.

Les participants se communiquent alors $N1$, $N2$, $N3$, $N4$ et $N5$ et calculent chacun de leur côté la somme $N1 + N2 + N3 + N4 + N5 = N$.

Si N est «un multiple de 6», c'est que tous ont voté OUI ; si N est «un multiple de 6 plus 1», c'est qu'il y a eu un vote NON ; si N est «un multiple de 6 plus 2», c'est qu'il y a eu deux votes NON, etc.

Si toutes les opérations se déroulent normalement, aucun des participants au vote ne dispose d'informations sur le vote des autres, en dehors de celles déduites normalement du résultat. En effet, connaître la valeur de $b1$ (ce qui est la seule chose que A connaisse du vote de B) ne fournit aucune indication sur le reste de la division par 6 de $b = b1 + b2 + b3 + b4 + b5$, et donc A ne connaît rien du vote de B. Par symétrie, aucun participant ne peut tirer quoi que ce soit concernant le vote des autres des informations qu'il a eues entre les mains.

Nous avons supposé que les participants étaient honnêtes, mais il est inté-

3. LE VOTE PAR TÉLÉPHONE

Comment 5 personnes peuvent-elles voter une motion par téléphone en préservant le secret du vote ?

Pour voter OUI, choisir un multiple de 6 (par exemple 60)

Pour voter NON, choisir un multiple de 6 plus 1 (par exemple 37)

A vote OUI : il choisit 60 qu'il décompose en $3 + 12 + 30 + 7 + 8$

B vote NON : il choisit 37 qu'il décompose en $3 + 11 + 11 + 6 + 6$

C vote OUI : il choisit 30 qu'il décompose en $10 + 2 + 8 + 5 + 5$

D vote NON : il choisit 19 qu'il décompose en $3 + 3 + 3 + 9 + 1$

E vote OUI : il choisit 42 qu'il décompose en $10 + 11 + 12 + 8 + 1$

(les décompositions sont arbitraires et laissées au choix de chacun)

La somme est $60 + 37 + 30 + 19 + 42 = 188 = 31 \times 6 + 2$.

Le 2 indique le nombre de NON.

Les nombres de la colonne 1 sont envoyés à A, qui les additionne

$$3 + 3 + 10 + 3 + 10 = 29 = N1$$

Les nombres de la colonne 2 sont envoyés à B, qui les additionne

$$12 + 11 + 2 + 3 + 11 = 39 = N2$$

Les nombres de la colonne 3 sont envoyés à C, qui les additionne

$$30 + 11 + 8 + 3 + 12 = 64 = N3$$

Les nombres de la colonne 4 sont envoyés à D, qui les additionne

$$7 + 6 + 5 + 9 + 8 = 35 = N4$$

Les nombres de la colonne 5 sont envoyés à E, qui les additionne

$$8 + 6 + 5 + 1 + 1 = 21 = N5$$

Les nombres $N1$, $N2$, $N3$, $N4$, $N5$ sont rendus publics.

La somme $N1 + N2 + N3 + N4 + N5$ est calculée. Le résultat est $188 = 6 \times 31 + 2$, et ainsi chaque participant connaît le résultat du vote sans connaître le vote des autres participants.



ressant de savoir si le système proposé est robuste aux tentatives de tricheries.

Deux possibilités de tricherie sont à envisager. Lorsque les cinq personnes font connaître les nombres $N1$, $N2$, $N3$, $N4$ et $N5$, si l'une d'entre elles, par exemple E, connaît les quatre autres résultats avant d'indiquer le sien, elle peut tricher en choisissant d'indiquer pour $N5$ un nombre qui donne une somme $N = N1 + N2 + N3 + N4 + N5$ conforme au résultat qu'elle souhaite. Ce risque est facile à écarter : il suffit, lors de l'échange des nombres $N1$, ..., $N5$, de procéder en deux temps. D'abord A communique $N1$ à B uniquement, B communique $N2$ à C uniquement... E communique $N5$ à A uniquement. Ensuite les nombres sont communiqués à tous. Personne, au moment où il divulgue son nombre, ne connaît tous les autres, donc personne ne peut forcer N à être comme il le désire.

Une autre tricherie est à envisager : un des participants pourrait choisir un nombre qui soit «un multiple de 6 plus 2», ce qui revient pour lui à voter deux fois NON. Toutefois, ce type de tricherie se retournera contre le tricheur si les quatre autres participants choisissent le NON, car alors il y a un total de 6 NON, apparaissant comme un vote à l'unanimité pour le OUI (puisque la somme $N1 + N2 + N3 + N4 + N5$ est un multiple de 6). Un tel résultat serait contraire au désir du tricheur (qui veut faire gagner

le NON). De plus, cette tricherie serait détectée par chaque participant puisque, ayant voté NON, il s'attendra à découvrir, lors du dépouillement, un NON au moins. Lorsqu'une telle tricherie est découverte, les participants, s'ils acceptent de lever le secret du vote, donc de communiquer les nombres qu'ils ont utilisés, sont en mesure de savoir qui a triché. Cette tricherie est donc doublement risquée pour le tricheur : il peut faire gagner le OUI et il est susceptible de se faire repérer. On pourra raisonnablement supposer que personne ne se laisse tenter.

Jean Paul DELAHAYE est directeur adjoint du Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille du CNRS.

James ASPNES, Richard BEIGEL, Merrick FURST et Steven RUDICH, *The Expressive Power of Voting Polynomials*, 23rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing, 1991, pp. 402-409.

Douglas BLAIR et Robert POLLACK, *La logique du choix collectif*, in *Pour La Science*, p. 104-111, octobre 1993.

Gilles COHEN, *Mathématiques du citoyen : élections piège à...* *Matheux*, in *Tangente*, n° 30, pp. 12-15, janvier-février 1993.

Nicholas FALLETTA, *Le livre des paradoxes*, chapitre 5, éditions Belfond, 1985.

Illusions musicales

SHAWN CARLSON

Des sons pour explorer le fonctionnement du cerveau.

Au cours de l'été 1893, Arthur Nikisch, qui est alors le chef d'orchestre le plus célèbre d'Europe, fait irruption chez Pyotr Ilich Tchaïkovski : il n'aime pas le finale de la sixième symphonie (la *Symphonie pathétique*) de Tchaïkovski, et il réclame un changement.

Les passages incriminés ne sont effectivement pas orthodoxes : Tchaïkovski répartit, en alternance, le thème principal et l'accompagnement entre les premiers et seconds violons ; chaque groupe doit jouer une note sur deux de chaque thème. Nikisch veut que Tchaïkovski, qui prépare alors la pièce pour

la première, réarrange le mouvement, de sorte que les premiers violons ne jouent que le thème principal, et les seconds violons l'accompagnement.

Pourquoi Nikisch était-il si opposé à la partition de Tchaïkovski ? Il est tentant de croire qu'ayant commencé les répétitions, sa colère musicale soit née d'une particularité que les acousticiens ont récemment découverte.

Aujourd'hui la partition originale ne dérange plus, car les premiers et seconds violons sont rassemblés dans l'orchestre ; les deux thèmes semblent provenir du même endroit. Toutefois, il y a un siècle, l'organisation des

orchestres était différente : les premiers violons se trouvaient à la gauche du chef d'orchestre, et les seconds violons à sa droite. Debout au centre, Nikisch a peut-être été assailli des deux côtés par deux ensembles disjoints de sons qui ne s'intégraient pas en un tout harmonieux. J'écris «il a peut-être été assailli», parce que (et c'est là la facette particulière de la perception) tout le monde n'entend pas la musique de la même façon : selon Diana Deutsch, de l'Université de San Diego, la manière dont nous percevons certaines configurations de sons dépend de notre langue maternelle et de notre dominance latérale (droitier-gaucher). Même le dialecte semble déterminant : les personnes du Midi, par exemple, entendent certains arrangements de sons différemment des personnes d'Alsace.

Les mesures contestées de la *Symphonie pathétique* sont un exemple de configurations sonores ambiguës. Le cerveau de la plupart d'entre nous assemble les voix des violons pour former les mélodies voulues par Tchaïkovski. Cependant, le génie singulier de Nikisch pour la direction d'orchestre suggère qu'il distinguait avec une précision extraordinaire les configurations sonores ; il ne se laissait peut-être pas duper par l'illusion.

Aujourd'hui, on peut utiliser ces illusions afin d'explorer le fonctionnement du cerveau. Jusqu'à présent, seule une poignée de psychoacousticiens pouvait faire des expériences, mais D. Deutsch vient de réunir quelques illusions auditives sur un disque compact (Philomel Records, Box 12189, La Jolla, CA 92039-2189 ; téléphone : 001-800-225-1228 ; fax : 001-619-453-4763 ; sur Internet : <http://www.philomel.com> ; 14,95 dollars plus 4,95 dollars de frais de port).

J'ai récemment visité le laboratoire de D. Deutsch et j'ai fait l'expérience de ces illusions. Mon initiation a commencé par l'illusion de l'octave. Dans un casque stéréophonique, j'ai écouté une configuration simple : deux notes séparées par une octave étaient émises dans le casque, d'abord la note grave dans l'écouteur gauche et la note aiguë dans l'écouteur droit, puis la note aiguë dans l'écouteur gauche et la note grave dans l'écouteur droit, et à nouveau la confi-



Corbis-Bettmann



Dover Publications



Glinka Museum, Moscou

1. Le chef d'orchestre Arthur Nikisch (en haut) réécrit une partie de la *Symphonie pathétique* de Tchaïkovski, de sorte que le premier violon joue *fa, mi, ré, do, si*, et le deuxième *si, la dièse, sol dièse, mi dièse, mi*. La partition originale (ci-dessus) de Tchaïkovski (à droite) fait jouer *si, ré, sol dièse, do, mi dièse* par le premier violon, et *fa, la dièse, ré, mi dièse, si* par le second. L'objection de Nikisch pourrait avoir pour origine un caractère particulier de la perception humaine des sons.



Corbis-Bettmann