

Qu'un seul chiffre soit changé à chaque étape explique partiellement que le code de Gros-Gray donne la solution du voyageur de commerce en dimension n : ne changer qu'un seul chiffre signifie que les trajets qu'emprunte le voyageur de commerce sont des arêtes du parallélépipède, il évite donc d'emprunter les diagonales d'un rectangle, qui, on le sait, sont plus longues que les côtés.

Qu'un seul chiffre soit changé à chaque étape est aussi ce qui fait l'intérêt du code en électronique et en informatique, où il est utilisé dans la conception de certains circuits et pour l'exploitation

des ordinateurs parallèles : on place les unités de calcul de la machine sur un réseau correspondant à un hyper-cube, et le code de Gros-Gray fournit une numérotation des sommets de cet hyper-cube permettant le contrôle et l'optimisation des communications.

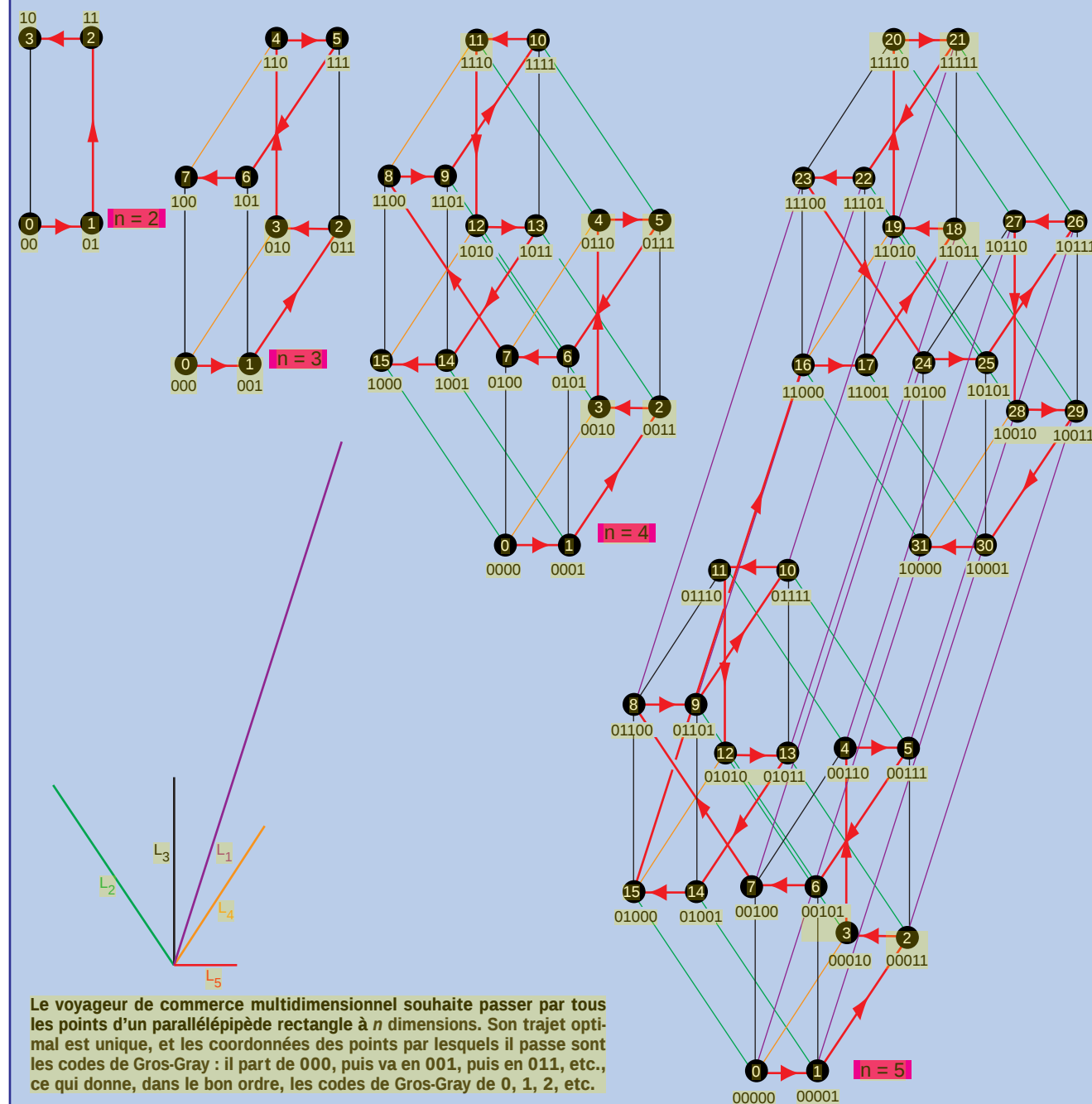
D'autres codes, dénommés codes continus, ont la propriété que le passage d'un nombre au suivant ne change qu'un seul chiffre ; toutefois, ils conduisent à des chemins plus longs et d'autre part le code Gros-Gray est le plus élégant de tous les codes continus, comme le montrent ses autres caractérisations.

RÉCURRENCE, COPIE-AUGMENTÉE ET FRACTALS

La deuxième caractérisation procède par récurrence :

- le code de Gros-Gray de 0 est «00» (ce qui pour nous est équivalent à «00» ou «000» ou «0000», etc. ; d'une manière générale, nous ne tenons pas compte des «0» les plus à gauche d'un code (comme en arithmétique nous ne prenons pas en compte les «0» devant un nombre) ;
- si nous connaissons le code de Gros-Gray des 2^n premiers entiers, celui des 2^n suivants est obtenu en les reprenant

2. LES TRAJETS DU VOYAGEUR DE COMMERCE SUR UN PARALLÉLÉPIPÈDE RECTANGLE



en ordre inverse et en faisant précéder chacun des codes d'un «1».

Exemple : à partir des 4 premiers codes 00, 01, 11, 10, on obtient les quatre suivants en inversant l'ordre 10, 11, 01, 00 et en ajoutant un «1» devant chaque code : 110, 111, 101, 100. À cause de cette propriété, on dit que le code de Gros-Gray est un code réfléchi.

Cette caractérisation donne un petit air fractal au parcours du voyageur de commerce : le chemin qu'il suit dans la seconde moitié du trajet est, à l'envers et translaté, le même que celui qu'il a parcouru dans la première moitié du trajet ; mais, dans le second quart, le chemin parcouru est aussi, à l'envers et translaté, le même que celui parcouru dans le premier quart ; etc. (voir la figure 2). D'ailleurs, sur un parallélépipède, dans un espace à une infinité de dimensions dont les côtés seraient de longueur $1/2^n$, le trajet du voyageur de commerce serait effectivement une courbe fractale.

La troisième caractérisation indique comment connaître le numéro du chiffre

qui change quand on passe d'un code au suivant : le code de Gros-Gray de n ne change du précédent que par un seul chiffre dont le numéro (en comptant à partir de la droite) est fixé par la suite : 1213121412131215...

Cette suite, que l'on dénomme suite de la copie-augmentée, s'obtient de la façon suivante : on part de la suite «1», on la prolonge en la recopiant exactement sauf le dernier élément qu'on augmente de 1, et on recommence : de «1», on passe à «12», puis à «1213», puis à «12131214», etc. Dans la figure 1, on a représenté en rouge les chiffres qui changent ainsi d'un code au suivant : leur dessin, très régulier, fait apparaître, là encore, une forme fractale.

La quatrième caractérisation indique la description explicite de tous les chiffres. Les derniers chiffres des codes de Gros-Gray suivent le motif 01100110011, etc. Les avant-derniers chiffres des codes de Gros-Gray suivent le motif 001111000011110000... etc. Les chiffres numéro i suivent (en partant de la fin) le

motif 2^i fois le «0», puis périodiquement 2^{i+1} le chiffre «1», 2^{i+1} le chiffre «0».

Cette définition est la plus commode pour généraliser dans d'autres bases que deux les codes de Gros-Gray : en base trois, on fait varier le dernier chiffre selon le motif 0122100122100..., l'avant-dernier en reprenant le même motif où l'on répète trois fois chacun des chiffres, soit 0001112222211100000111... etc.

Ces codes des Gros-Gray en base p donnent, là aussi, la solution au problème du voyageur de commerce sur un réseau parallélépipédique comportant p points dans chaque direction.

DÉRIVATION ET INTÉGRATION

Les deux dernières caractérisations sont les plus importantes en pratique, car elles indiquent comment passer de la notation binaire au code de Gros-Gray correspondant, et inversement.

La règle de passage de la notation binaire au code de Gros-Gray est amusante. Le code de Gros-Gray de l'entier n s'obtient en prenant le code binaire de n et en le dérivant :

- les deux notations ont le même premier «1» ; ensuite,
- le digit numéro i en partant de la gauche est 0 si les chiffres numéro $i-1$ et i du code binaire sont égaux, sinon c'est un 1 (il s'agit bien de l'opération analogue à la dérivation lorsque l'on travaille uniquement avec des «0» et des «1»).

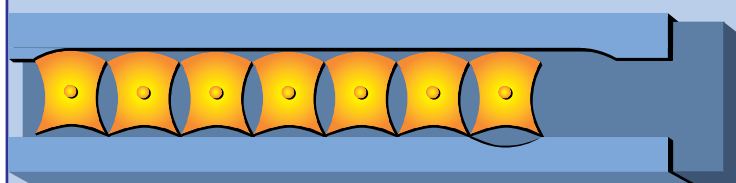
Exemple. L'entier 14 s'écrit 1110 en notation binaire (car $14 = 8 + 4 + 2$), ce qui en dérivant donne le code de Gros-Gray de 14 : 1001 (le deuxième chiffre est un «0», car le premier et le second chiffre de l'écriture binaire de 14 sont égaux ; le quatrième chiffre est un «1», car le troisième et le quatrième chiffre de l'écriture binaire de 14 sont différents.)

Cette méthode de calcul est très utile au voyageur de commerce qui, ne sachant pas où il est, mais se souvenant du nombre n de points qu'il a visités, se demande où il doit aller. Il écrit n en base 2, le dérive et sait alors où il est et donc où il doit se rendre.

La règle de passage du code de Gros-Gray à la notation binaire utilise bien sûr le procédé inverse de la dérivation : l'intégration. La notation binaire b de l'entier n s'obtient en intégrant le code de Gros-Gray g de l'entier n , ce qui précisément signifie que le chiffre numéro i de b en comptant à partir de la gauche est la somme, modulo 2, des chiffres de g jusqu'au chiffre numéro i .

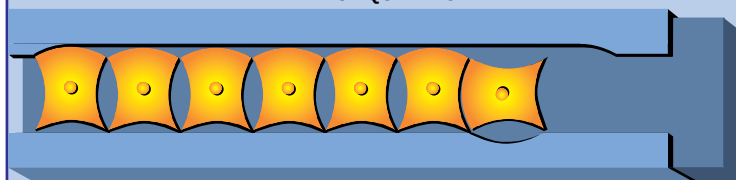
Exemple. $g = 101100$ est le code de Gros-Gray de $b = 110111$, qui est l'écriture binaire de $32 + 16 + 4 + 2 + 1 = 55$ (le quatrième chiffre de b est un «1», car

3. LE CASSE-TÊTE SPIN-OUT

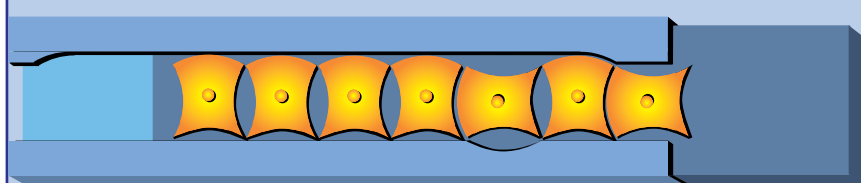


POSITION DE DÉPART : 111111 CODE DE GROS-GRAY DE 1010101 = 85

CE QU'IL FAUT FAIRE :

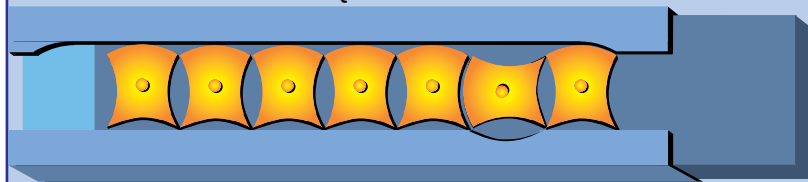


APRÈS LE 1^{er} MOUVEMENT CORRECT : 111110 CODE DE GROS-GRAY DE 1010100 = 84



APRÈS LE 2^e MOUVEMENT CORRECT : 1111010 CODE DE GROS-GRAY DE 1010011 = 83
ON POURSUIT JUSQU'À 0000000

CE QU'IL NE FAUT PAS FAIRE :



POSITION ACCESSIBLE À PARTIR DE LA POSITION DE DÉPART : 1111101
CODE DE GROS-GRAY DE 1010110 = 86
SI L'ON POURSUIT AINSI, ON ABOUTIT À L'IMPASSE 123 (CODE DE GROS-GRAY 1000000)