

aussi appelé *meleda puzzle*, Talamodspel, ou anneaux chinois. Une légende en attribue l'invention au soldat Hung Ming (181-234), qui en aurait confié la résolution à son épouse pour l'occuper pendant qu'il était parti faire la guerre. La première mention du baguenaudier est faite au milieu du xiv^e siècle sous la plume du mathématicien Jérôme Cardan (1501-1576, plus connu pour sa méthode de résolution des équations du troisième degré et pour son invention des cardans), qui décrit le baguenaudier dans son *De subtilitate libri XXI* paru à Nuremberg en 1550, où il précise : «Cela de soi est inutile ; toutefois on peut le transférer aux serrures artificieuses de coffres.»

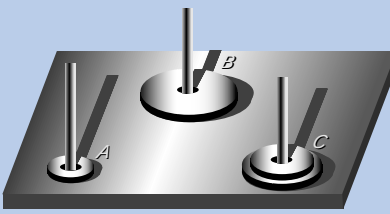
Effectivement, en Norvège, des sacs de voyage ont été équipés d'une fermeture utilisant le baguenaudier : on peut craindre que ces serrures ne se soient révélées agaçantes, par exemple lorsque leur propriétaire, pris d'une soudaine envie d'éternuer, désirait y saisir un mouchoir.

Pour résoudre le baguenaudier, l'analyse proposée pour le *Spin-out* s'applique presque mot à mot. On constate d'abord que le dernier anneau peut toujours être abaissé ou levé et que le seul autre anneau qui accepte de se déplacer est celui qui précède l'anneau levé le plus à droite (et cela à condition d'avoir tiré la double tringle centrale le plus à gauche possible). Cela suggère de coder la position du baguenaudier, en associant un «1» à tout anneau levé et un «0» à tout anneau baissé. La position de départ dans le cas d'un baguenaudier à 7 anneaux est donc 1111111, qui est le code de Gros-Gray de l'entier qui, en binaire, s'écrit 1010101, qui est 85. La suite est la même que pour le *Spin-out* : à condition de partir dans la bonne direction, vous aboutirez en 85 étapes, et aucune méthode ne peut raccourcir les manipulations nécessaires à la libération de la double tringle centrale. Si vous partez dans la mauvaise direction, vous aboutirez à une impasse correspondant à la position 1000000, qui est le code de Gros-Gray de l'entier 123, et vous serez alors obligé de repartir en arrière.

Notons deux avantages du *Spin-out* sur le baguenaudier : la commodité des manipulations et la facilité à en imaginer des variantes. Même les casse-tête millénaires sont perfectibles !

Une fois parti dans la bonne direction, la seule règle à appliquer est : «déplacer alternativement l'anneau le plus à droite et l'anneau mobile le plus à gauche (qu'on identifie en tirant au maximum la double tringle centrale)».

L'anneau que l'on déplace, d'après ce que nous avons dit concernant le

5. LES TOURS DE HANOÏ			
			
SOLUTION OPTIMALE EN 15 MOUVEMENTS DANS LE CAS DE QUATRE DISQUES			
POSITION DES DISQUES	DÉPLACEMENTS À FAIRE	DISQUES DÉPLACÉS	
A B C			
[4321, ,]	AB	1	
[432, 1,]	AC	2	
[43, 1, 2]	BC	1	
[43, , 21]	AB	3	
[4, 3, 21]	CA	1	
[4 1, 3, 2]	CB	2	
[4 1, 32,]	AB	1	
[4 , 321,]	AC	4	
[, 321, 4]	BC	1	
[, 32, 4 1]	BA	2	
[2, 3, 4 1]	CA	1	
[21, 3, 4]	BC	3	
[21, , 43]	AB	1	
[2, , 1, 43]	AC	2	
[, , 1, 432]	BC	1	
[, , , 4321]			

5. Dans cette solution, on reconnaît la suite copie-augmentée déjà rencontrée dans le voyageur de commerce à n dimensions. Récemment, on a prouvé que la suite des déplacements ne se répète jamais deux fois consécutivement (quel que soit le nombre de disques envisagé). La règle «déplacer alternativement le disque le plus petit (de A vers B, de B vers C, ou de C vers A), puis un autre disque» suffit pour trouver la solution optimale qui, dans le cas de n disques, est une succession de $2^n - 1$ déplacements.

code de Gros-Gray, a pour numéro (en numérotant de droite à gauche) l'entier correspondant de la suite de la copie-augmentée 1213121412131215... qu'on parcourt à l'envers à partir de son 85^e élément.

DES ANNEAUX CHINOIS AUX TOURS DE HANOÏ

Cette suite donne d'ailleurs une solution à un autre casse-tête célèbre et ancien : les tours de Hanoï. Il s'agit de déplacer une pile de disques de taille décroissante en n'utilisant que trois emplacements A, B et C (formant un triangle équilatéral) et en s'imposant à chaque étape de ne jamais poser un disque que sur un disque plus grand. La solution optimale, qui demande $2^n - 1$ étapes, consiste à déplacer alternativement le disque de taille 1 (le plus petit) dans le sens des aiguilles d'une montre, puis celui de taille 2 (le second en taille), puis le premier (dans le sens des aiguilles d'une montre), puis le troisième, etc.,

en suivant le schéma indiqué par la suite copie-augmentée 12131214...

Ceux qui trouvent que la suite de la copie-augmentée est trop compliquée peuvent retenir la solution suivante, encore plus courte et plus simple (analogue à celles énoncées plus haut pour le *Spin-out* et le baguenaudier) : «déplacer alternativement le disque le plus petit dans le sens des aiguilles d'une montre, puis le seul disque disponible d'après les règles».

Un résultat récent dû aux mathématiciens J.-P. Allouche, D. Astoorian, J. Randall et J. Shallit indique une propriété remarquable de la suite des mouvements décrivant la solution optimale dont nous avons dit qu'elle était constituée de $2^n - 1$ déplacements. Il y a six mouvements possibles à chaque étape : prendre le disque en A et le mettre en B, prendre le disque en B et le mettre en C, etc., qu'on désigne par AB, BC, CA, BA, CB, AC. Dans le cas de quatre disques, la solution optimale consiste en la suite de déplacements AB AC BC AB CA CB AB AC BC BA CA BC AB AC BC. Les quatre mathématiciens ont prouvé qu'aussi grand que soit le nombre de disques considérés, les déplacements décrivant la solution optimale ne se répètent jamais deux fois consécutivement : vous n'aurez jamais deux fois de suite AB, ni deux fois de suite AB AC, etc. On n'a jamais épuisé le pouvoir d'inspiration des bons casse-tête mathématiques !

Jean-Paul DELAHAYE est directeur adjoint du Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille du CNRS.

J.-P. ALLOUCHE, D. ASTOORIAN, J. RANDALL et J. SHALLIT, *Morphisms, Squa-free Strings, and the Tower of Hanoi Puzzle*, in *The American Mathematical Monthly*, pp. 651-658, 1994.

A. DELEDICQ, *Mathématiques buissonnières*, éditions CEDIC, 1975.

P. van DELFT et J. BOTERMANS, *Creative Puzzles of the World*, Key Curriculum Press. Trad. française : *Mille casse-tête du monde entier*, éditions du Chêne, 1977.

A. DEWDNEY, *Le Yin et le Yang, récursivité et itérations, les Tours de Hanoï et le Baguenaudier*, in *Récréations informatiques*, Pour La Science, février 1985.

E. LUCAS, *Récréations mathématiques*, tome 1, Paris 1891. Réédition Librairie Scientifique Blanchard, 1992.

Ian STEWART, *Four Encounters with the Sierpinski's Gasket*, in *The Mathematical Intelligencer*, vol. 17, n° 1, pp. 52-64, 1995.

Des vaches dans le labyrinthe

IAN STEWART

«Où sont les vaches?» est un labyrinthe autoréférentiel n'ayant rien à voir avec les vaches!

Dans les mathématiques sérieuses, les labyrinthes sont moins rares que vous pourriez le croire. En effet, toute recherche mathématique requiert que vous trouviez un itinéraire à travers un labyrinthe d'énoncés, le passage d'un énoncé au suivant étant une déduction mathématique valide. Un nouveau type de labyrinthe, inventé par Robert Abbott, de Jupiter, en Floride, et nommé «Où sont les vaches?», est à la

fois géométrique et logique. Il est extrait de son nouvel ouvrage *Supermazes* (Super-labyrinthes) (Prime Edition, Rocklin, Californie, 1996). Certains lecteurs se souviendront de R. Abbott comme inventeur du jeu de cartes Éleusis, décrit par Martin Gardner dans *Pour la Science*, en décembre 1977.

Le labyrinthe de R. Abbott est fondé sur un concept logique paradoxal : celui d'autoréférence. Les énoncés autoréfé-

rents sont, pour les logiciens et les philosophes, causes de migraines. Un exemple est associé au nom d'Épiménides, un Crétois qui déclarait que tous les Crétois étaient menteurs, ce qui peut se réduire à :

CET ÉNONCÉ EST FAUX.

L'est-il ou ne l'est-il pas ? Une contradiction pointe le nez dans chaque cas. Et il y a des énoncés mutuellement référentiels, tels :

L'ÉNONCÉ QUI SUIT EST VRAI.

L'ÉNONCÉ QUI PRÉCÈDE EST FAUX.

Un champ de mines logique !

L'autoréférence est un important domaine d'étude pour les logiciens, mais la question véritablement importante (à mon point de vue) est celle-ci : l'autoréférence peut-elle être utilisée pour ajouter une difficulté supplémentaire aux labyrinthes ? La réponse, que j'ai plaisir à retranscrire, est : «Oui.»

Le labyrinthe de R. Abbott est représenté sur la figure ci-dessous. Non seulement le texte est autoréférentiel, mais les règles du labyrinthe changent selon votre déplacement. Pour parcourir ce labyrinthe, il vous faut les deux mains, et il est utile de tenir un crayon ou tout autre «pointeur» dans chacune d'elles

