

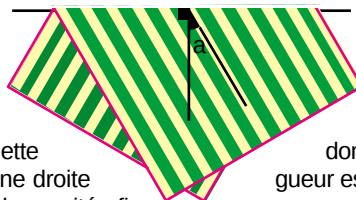
JEU-CONCOURS

PIERRE TOUGNE

N° 39

COMMENT ÉTENDRE SA SERVIETTE DE BAIN ?

Ce mois, un problème pratique : comment faire sécher le plus rapidement possible sa serviette de bain quand on n'a pas de pinces à linge et que la corde à linge est très glissante. Plus précisément, on supposera qu'il n'y a aucun frottement entre la corde et la serviette et, par conséquent, que la serviette doit être pliée autour d'une droite passant par son centre de gravité afin qu'elle ne tombe pas. D'autre part, pour que la serviette sèche le plus rapidement possible, on doit chercher à minimiser la surface des parties de la serviette qui se recouvrent. Dans le cas d'une serviette carrée, il n'est pas difficile de montrer que l'on doit la plier autour d'une droite faisant



un angle de $\pi/8 = 22,5$ degrés avec une diagonale de la serviette. Pour une serviette rectangulaire, le problème est plus délicat. Sauriez-vous déterminer l'angle α de la normale au pli avec l'axe de symétrie dans le sens de la longueur de la serviette (voir la figure) pour des serviettes dont le rapport largeur sur longueur est, soit 0,5, soit 0,838 ?

Envoyez vos réponses aux questions sur carte postale à **Pour la Science**, 8, rue Férou, 75006 Paris. Parmi les réponses exactes reçues pendant le mois de septembre 1997, dix gagnants tirés au sort recevront un livre.

RÉPONSE AU JEU-CONCOURS N°37

Remarquons qu'ajouter à droite d'un nombre binaire un 0 ou un 1 revient à multiplier le nombre décimal correspondant par deux et lui additionner respectivement 0 ou 1. D'autre part, le critère d'arrêt du jeu étant la divisibilité ou non du nombre décimal par un nombre premier p , ce n'est pas le nombre lui-même qui nous intéresse, mais le reste de sa division par p qui obéit à la même loi de transformation que le nombre lui-même en calculant simplement modulo p . Ainsi si p est un nombre premier de la liste, Marc devra éviter le reste 0 (évident) et le reste $(p-1)/2$, car Benoît, en ajoutant un 1, conduira au nombre décimal dont le reste de la division par p est $2 \times (p-1)/2 + 1 = p \equiv 0 \pmod{p}$, donc divisible par p . Prenons l'exemple de la liste (5, 7) : Marc doit éviter le reste 2 pour la division par 5 et le reste 3 pour la division par 7. Au départ, les deux restes sont 1 et 1, ce qui est noté (1, 1) ; s'il ajoute un 0 ceux-ci deviennent (2, 2), position perdante pour la division par 5, et s'il ajoute un 1, les restes sont (3, 3), position perdante pour la division par 7, donc Benoît gagne. Pour la liste (7, 11), Marc doit éviter les restes respectifs 3 et 5, d'où son meilleur jeu :

(1, 1) $\xrightarrow{0}$ (2, 2) $\xrightarrow{0}$ (4, 4) $\xrightarrow{0}$ (1, 8)

mais, au coup suivant, il ne peut donner que les deux positions perdantes $\xrightarrow{0}$ (2, 5) ou $\xrightarrow{1}$ (3, 6), et Benoît gagne.

Dans le cas de la liste (5, 11), la suite des coups forcés de Marc est (1, 1) $\xrightarrow{1}$ (3, 3) $\xrightarrow{0}$ (1, 6) $\xrightarrow{1}$ (3, 2) $\xrightarrow{0}$ (1, 4) $\xrightarrow{1}$ (3, 9) $\xrightarrow{0}$ (1, 7) $\xrightarrow{1}$ (3, 4) $\xrightarrow{0}$ (1, 8) $\xrightarrow{1}$ (3, 6) $\xrightarrow{0}$ (1, 1), et, comme (1, 1) est une position précédente, Marc gagnera en recommençant la même suite, c'est-à-dire la stratégie notée 1 10.

La liste (7, 11) est plus intéressante, car l'arbre binaire des possibilités de Marc a plusieurs branches et il y a 12 stratégies possibles dont la plus immédiate est (1, 1) $\xrightarrow{0}$ (2, 2) $\xrightarrow{0}$ (4, 4) $\xrightarrow{1}$ (2, 9) $\xrightarrow{1}$ (5, 8) $\xrightarrow{1}$ (4, 6) $\xrightarrow{1}$ (2, 2) soit 10 0111 et la plus simple 10 01 (vérification laissée au lecteur). L'analyse de la liste (7, 11, 13, 17) ne présente pas de difficulté, si ce n'est sa longueur, et l'on montre que Marc en jouant au mieux perdra au 16^e coup après la suite 100 101 111 010 00 {0/1}.

À propos du Jeu-Concours n° 35, une erreur s'est glissée dans la réponse. Il fallait lire $I = \sqrt{119^2 - 105^2} = 56$. D'autre part, J. Marot a réussi la gageure de donner une expression algébrique (!) de la longueur I séparant les deux murs (on le trouvera sur le site WEB de *Pour la Science*).

Effondrement

L'article de Maurice Mattauer *La faille du tunnel de Toulon* (voir *Pour la Science*, avril 1997) comporte des appréciations inexactes. La complexité de la structure géologique du site avait été identifiée dès les premières études du projet de traversée souterraine de Toulon. Le grand chevauchement signalé par M. Mattauer a donc bien été pris en compte.

À chacun des stades d'avancement des études, des sondages de reconnaissance ont été réalisés pour dresser la coupe géologique complète du tunnel : un sondage tous les 40 mètres en moyenne. Deux galeries de reconnaissance ont été creusées. Les géologues de l'administration ont, en outre, fait appel aux spécialistes de l'Université de Marseille pour l'interprétation de toutes ces données.

De même, les caractéristiques mécaniques des terrains ont été appréciées par des essais en laboratoires, des essais *in situ* et l'analyse classique du comportement des galeries de reconnaissance (étude de la déformation de la galerie, des tassements, et mesure des contraintes). Ce n'est donc pas dans la méconnaissance des terrains et de leurs caractéristiques qu'il faut rechercher les causes de l'effondrement du tunnel de Toulon.

C. LEYRIT, Ministère de l'équipement, du logement, des transports et du tourisme

Réponse de M. Mattauer

À lire la réponse de C. Leyrit, on pourrait croire que les études ont été très bien menées et que tout a été pris en compte. Et le tunnel lui-même ne sait pas pourquoi il s'est si bêtement écroulé en pleine ville.

La réalité est hélas bien différente. Il est faux de dire que le grand chevauchement de la nappe du Cap Sicié avait été envisagé et localisé sur le tracé du tunnel. En effet, le dossier géologique mis à la disposition des entreprises, dans la phase de consultation avant travaux, proposait deux hypothèses structurales, fort éloignées l'une de l'autre, pour expliquer la géologie complexe du sous-sol toulonnais. La première hypothèse, la plus argumentée dans le dossier, mettait en avant une tectonique simple à composante verticale, avec failles sub-verticales, tout à fait irréaliste et en contradiction totale avec le contexte régional.

La deuxième hypothèse envisageait l'existence d'une nappe de charriage, mais d'une façon théorique et seulement en quelques lignes, sans la moindre localisation sur le terrain et sans aborder les conséquences possibles sur la qualité des terrains intéressés par le tunnel.

Ce n'est que trois mois avant l'effondrement que des sondages profonds ont été réalisés sous le niveau du tunnel ; c'est l'intervention d'un très bon expert en géologie structurale qui, un mois avant, a permis la mise en évidence de ce chevauchement, sans équivoque, et qui a découvert l'empilement de plusieurs écaillles de charriages apparaissant en série inverse, les terrains les plus jeunes se trouvant sous les plus anciens. Il est piquant de constater que c'est l'entreprise, à juste titre inquiète, qui est à l'origine de la consultation d'un géologue indépendant et de la mise en évidence de la nappe, et non pas les responsables du projet.

On peut donc bien affirmer que «l'interprétation de toutes les données», faite par ces responsables dans différents rapports entre 1989 et 1991, et maintenue jusqu'après l'éboulement, est toujours restée simpliste et sommaire ; elle n'a pas été capable de déchiffrer la structure complexe de la région qui avait pourtant fait l'objet de plusieurs articles dans la presse spécialisée depuis 1963. Cela est bien compréhensible, car ces différentes personnes ont été consultées pour donner un avis sur un problème tectonique difficile qui relevait de la compétence de spécialistes en géologie structurale.

On a ainsi réussi l'exploit de dépenser 60 millions de francs sans s'être rendu compte qu'on se trouvait en plein dans une nappe de charriage. Il est vrai, que pour la découvrir, il aurait fallu réaliser des sondages traversant la nappe, donc bien plus profonds que le radier du tunnel.

Si on peut se contenter de reconnaître les terrains dans l'environnement immédiat d'un tunnel, en contexte géologique simple, éloigné des zones perturbées par la tectonique, il est évident qu'à Toulon il fallait ratisser beaucoup plus large pour mettre en évidence la grande faille responsable du laminage et du broyage des terrains où est creusé l'ouvrage. Si ce contexte géologique avait été mis en évidence dès l'origine des travaux de reconnaissance, le soutènement du tunnel aurait certainement été dimensionné autrement.

On cherche aujourd'hui à prouver qu'il n'y a pas de responsable ; afin de sauver la face, de se couvrir pour que les surcoûts, engendrés par un projet mal adapté aux réalités géologiques, soient pris en charge par tous les payeurs et les assurances. Finalement ce tunnel coûtera probablement près de un milliard de francs, alors qu'il a été négocié à l'origine à moins de 300 millions de francs.

Mettons en place un Comité technique des tunnels qui rendra obligatoire l'intervention d'experts compétents, et qui rappellera systématiquement que les études géologiques sérieuses sont évidemment un préalable à toutes les consi-

dérations géotechniques, ces dernières devant découler des premières, et non l'inverse, comme le croit encore C. Leyrit. D'ailleurs, il ne nous dit pas encore pourquoi le tunnel s'est effondré... il y a plus de 17 mois.

Division euclidienne

Considérons l'ensemble des restes de la division euclidienne d'un nombre premier par son rang. Cet ensemble est-il majoré ? Si la réponse est non, cet ensemble est-il égal à celui des entiers naturels ? Peut-on trouver trois (ou plus) nombres premiers consécutifs ayant même reste pour cette division ?

Abdoulah VAVODA, Saint-Laurent du Maroni

Réponse de M. Balazard, de l'Université Bordeaux 1

La troisième question est la plus simple. Grâce au logiciel MAPLE, j'ai constaté que :

$$1181 = 6 \times 194 + 17$$

$$1187 = 6 \times 195 + 17$$

$$1193 = 6 \times 196 + 17$$

La réponse à la première question est négative. Voici la démonstration.

Lemme 1 : soit α, β, a, b quatre nombres réels tels que $0 < \alpha < \beta < 1$, $a - b < \beta - \alpha$, et u_n une suite de nombres réels tendant vers l'infini telle que $u_n + 1 - u_n$ tende vers 0 quand n tend vers l'infini. Alors, il existe un nombre entier K tel que, pour tout nombre entier $k \geq K$, on puisse trouver n vérifiant :

$$k + \alpha \leq u_n - a, \text{ et } u_n - b \leq k + \beta$$

Lemme 2 : Si on note p_n le n -ième nombre premier, quand n tend vers l'infini, $p_n/n - \log$ $n - \log(\log n)$ tend vers -1 .

C'est une version forte du théorème des nombres premiers.

D'après le lemme 2, on a pour $n \geq n_0$:

$$n(u_n - 5/4) \leq p_n \leq n(u_n - 3/4)$$

où $u_n = \log n + \log(\log n)$, suite qui vérifie l'hypothèse du lemme 1. Par le lemme 1, on trouve K tel que, pour tout $k \geq K$, il existe $n \geq n_0$ tel que $k + 1/5 \leq u_n - 5/4$ et $u_n - 3/4 \leq k + 4/5$

$$\text{d'où } kn + n/5 \leq p_n \leq kn + 4n/5$$

d'où par conséquent, si on note $f(n)$ le reste de la division de p_n par n :

$$n/5 \leq f(n) \leq 4n/5.$$

Quand on fait tendre k vers l'infini, on voit que cet encadrement se produit pour une infinité d'entiers n , ce qui montre bien que l'ensemble des valeurs de f n'est pas borné.

On peut sans doute préciser considérablement cet énoncé, et peut-être montrer que l'ensemble des valeurs de f est de densité 1. En revanche, je n'ai pas trouvé s'il contient ou non tous les entiers naturels.