

lares à l'axe de vibration, la distance entre rides est supérieure à l'amplitude de vibration et la hauteur des rides est environ égale à la distance entre les rides. En modifiant l'amplitude ou la fréquence de vibration, on constate que la hauteur des rides dépend de l'amplitude et de la fréquence de vibration. Enfin les rides forment un relief stationnaire, dont la hauteur n'oscille pas au cours du temps.

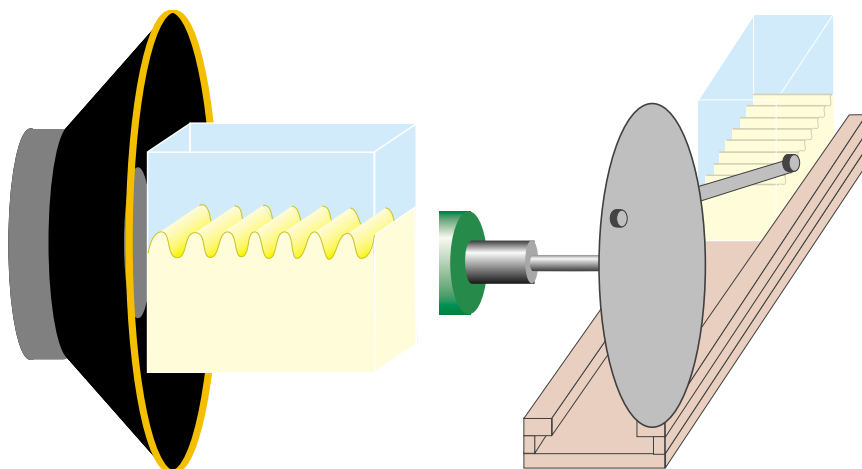
### UN RELIEF STATIONNAIRE À LA SURFACE DU SABLE

Quand on réduit l'amplitude de vibration, l'aide du stroboscope devient essentielle, car le relief est complètement brouillé par le mouvement de la cellule. Pour construire le stroboscope, je vous conseille d'utiliser une perceuse à variateur de vitesse qui fera tourner un disque cranté (faites une dizaine de trous dans le disque pour augmenter la fréquence d'éclairement) devant une source intense de lumière. Vous continuerez de voir le profil stationnaire lorsque les distances entre rides sont inférieures à l'amplitude de vibration. Ainsi, quelle que soit l'amplitude de vibration, un relief stationnaire se crée !

Ceux qui voudront se lancer dans de la physique plus quantitative pourront déterminer les variations de la distance entre rides en fonction de l'amplitude et de la fréquence de la vibration : ils trouveront que le paramètre qui détermine les structures est  $2\pi af$ , et ils pourront vérifier expérimentalement que le résultat ne change pas si l'on change la taille des grains.

Le phénomène aurait-il encore lieu si les grains étaient de taille nulle ? Ce cas est celui de deux liquide non miscibles : dans les conditions de l'expérience précédente, on trouve que les rides n'apparaissent pas pour des vibrations trop faibles, mais qu'il existe un seuil au-delà duquel les rides apparaissent ; ce seuil correspond à des rides de longueur d'onde assez grande, observables à l'œil nu. L'absence de rides aux petites longueurs d'onde s'explique par l'existence de forces capillaires, à la surface des deux liquides : celles-ci empêchent l'existence de rides de petite longueur d'onde, qui correspond à un plissement trop important de l'interface (ces forces n'agissent pas dans le cas du sable plongé dans l'eau, car l'eau est partout présente). De surcroît, l'observation des rides pour des grains de taille nulle (pas de grains) montre que l'on doit chercher le moteur de la formation des rides dans le comportement liquide du milieu granulaire.

Pour comprendre la formation des rides, examinons les forces et les phé-



3. Deux façons de faire vibrer une cellule : à l'aide d'un haut-parleur ou d'une perceuse reliée à la cellule par une bielle. Ces vibrations engendrent des rides à l'interface du sable et de l'eau

nomènes importants dans les expériences précédentes. Le physicien américain Richard Feynman avait introduit les notions d'eau sèche et d'eau mouillée, pour distinguer respectivement les cas où les effets d'inertie sont les seuls à prendre en compte et ceux où la viscosité du fluide est notable.

### UN LIQUIDE SEC

Un liquide sans aucune viscosité pourrait s'écouler contre une paroi sans exercer aucune force tangentielle sur cette dernière : au contact d'une paroi, la vitesse du liquide serait différente de la vitesse de la paroi. En revanche, un liquide visqueux se déplace à la même vitesse que les solides qu'il baigne : il mouille les parois. Loin de ces dernières, le liquide peut être soumis à des effets d'inertie qui l'obligent à bouger à une vitesse différente de celle de la paroi. L'eau réelle a les deux types de comportement : l'eau au contact d'une paroi a la même vitesse qu'elle, mais l'eau loin de la paroi peut avoir une vitesse différente si on exerce des forces qui la mettent en mouvement.

Que se passe-t-il si l'on impose à une plaque plane, mince, infinie, immergée dans l'eau, un mouvement vibratoire parallèle à son plan ? L'eau se comporte-t-elle comme de l'eau sèche, qui reste immobile, ou comme de l'eau visqueuse, entraînée par la vibration ? Le physicien irlandais George Stokes étudia théoriquement ce mouvement en postulant que l'eau était visqueuse. Il montra notam-

ment que le mouvement était essentiellement localisé sur une épaisseur nommée épaisseur de la couche visqueuse, et que l'amplitude de ce mouvement décroît exponentiellement avec la distance à la plaque. Par exemple, pour les fréquences de dix hertz dans l'eau, l'épaisseur de la couche visqueuse est de l'ordre de 0,5 millimètre.

Dans le cas qui nous intéresse, l'épaisseur de la couche visqueuse est inférieure à toutes les dimensions de la cellule, mais supérieure à la taille des pores entre les grains de sable. Aussi la viscosité des deux milieux peut être négligée, et ces derniers ne sont soumis qu'aux effets inertiels ; en revanche, les pores entre les grains ne sont pas suffisamment gros pour que le liquide interstitiel s'y mue librement. Aussi l'eau interstitielle est piégée entre les grains et se meut à la vitesse du milieu granulaire. L'ensemble des grains et de l'eau interstitielle forme une phase unique, que nous nommerons phase granulaire.

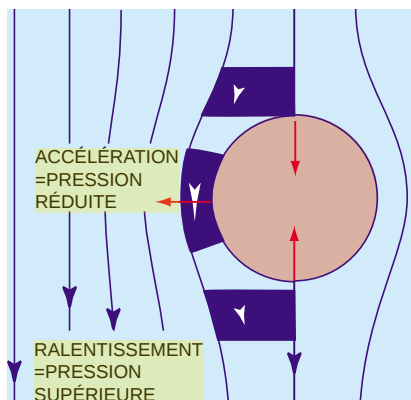
### LES DEUX PHASES

Cette observation explique pourquoi les phénomènes qui s'observent dans une cellule contenant du sable et de l'eau se retrouvent dans une cellule contenant deux liquides non miscibles. De surcroît, l'analyse précédente nous permet de négliger l'effet de la viscosité sur la dynamique de chacune des phases et de considérer que la mécanique y est régie par l'inertie. Dans ce cas, les deux milieux sont soumis à une gravité effective qui varie périodiquement en amplitude et en direction. Le milieu le plus dense tend à se mouvoir dans la direction de la gravité effective, et pousse le milieu le moins dense en sens inverse (le milieu le plus dense est le plus inerte). Cela

Pour se procurer le sablier utilisé dans les expériences décrites par P. Évesque, voir la page 92.



**4. Quand on fait vibrer verticalement le sablier inversé, on observe la montée de «gouttes» de matière granulaire, qui se déforment en strates horizontales.**



**5. Une goutte qui s'élève dans un liquide s'aplatit, parce que le liquide accélère en la contournant : cette accélération s'accompagne d'une réduction de la pression sur la ceinture de la goutte ; simultanément, la pression augmente au-dessus et au-dessous de la goutte, quand le fluide ralentit.**

crée un mouvement périodique des deux liquides, la phase la plus dense se dirigeant dans le sens opposé à la vibration, et la phase la moins dense se dirigeant dans le sens opposé à la phase dense.

Que se passe-t-il quand une petite excroissance stationnaire se forme à la surface des deux phases ? Supposons que celle-ci soit engendrée au centre de la cellule, et qu'elle corresponde à l'invasion du liquide par la phase granulaire (voir la figure 2). Lors des mouvements de chaque phase, le débit de matière vers la droite est égal au débit

de matière vers la gauche, car toute la matière se conserve, dans la cellule fermée. Par exemple, si la phase supérieure se déplace vers la droite, la phase inférieure doit se déplacer vers la gauche. Or une excroissance née spontanément dans la phase supérieure réduit la section de la zone où la phase supérieure se déplace : la vitesse du fluide supérieur augmente, tandis que la vitesse du fluide inférieur diminue, à la verticale de l'excroissance. Selon la loi de Bernoulli, qui stipule que les fluides ont une pression inférieure quand leur vitesse augmente (parce que la quantité de liquide est conservée dans un écoulement), on doit alors admettre que la pression diminue au-dessus de l'excroissance, et qu'elle augmente en dessous : l'excroissance peut croître.

Comme l'interface n'est jamais en équilibre parfait, un ensemble de petites excroissances est amplifié, jusqu'à ce que les excroissances de plus grande longueur d'onde s'imposent. Pourquoi existe-t-il une limite à la taille des excroissances ? Parce que la pesanteur aplatit les excroissances trop grandes.

### LA VIBRATION À L'ENVERS

Quel résultat obtiendrions-nous en faisant vibrer le sablier inversé ? Nous pouvons obtenir la vibration voulue en remplaçant la petite cellule parallélépipédique par le sablier, sur le haut-parleur, mais nous pouvons aussi faire vibrer le sablier à l'aide d'une perceuse électrique équipée d'un variateur électronique. On fixe la perceuse sur un bâti où l'on place des glissières, et l'on engage sous ces glissières un support que l'on fait glisser en le reliant à l'axe de rotation de la perceuse par un système simple de bielle et de manivelle (voir la figure 3). Ainsi obtient-on des vibrations intenses et rapides : les meilleurs résultats s'obtiennent pour des amplitudes de vibration comprises entre 0,1 et 10 millimètres, et des fréquences comprises entre 1 et 60 hertz. Attention aux yeux et aux doigts : les accélérations sont si fortes qu'on prendra garde à ne jamais se placer dans la direction du mouvement, qui risque de désolidariser les pièces ; en outre, on recouvrira le montage d'un carter de protection.

Redressons le sablier et faisons-le vibrer verticalement. En l'absence d'écoulement (si tous les grains sont déjà piégés dans la chambre supérieure), rien ne se passe. En revanche, si l'on retourne le sablier et qu'on déclenche l'écoulement, on observe des phénomènes qui

dépendent de l'amplitude et de la fréquence de vibration. Pour les examiner, vibrions à amplitude constante et à fréquence croissante.

Les effets, à fréquence nulle, faisaient l'objet du précédent article : tant que la fréquence est faible, les grains montent normalement. Si l'on fait vibrer lentement, les différences de densité provoquent la déviation des grains au passage du col (en dessous, aucun effet n'est visible, car les grains sont tassés contre le col). Pourquoi sont-ils alors collés contre les parois ? L'effet est le même que quand on souffle sur une feuille de papier posée sur une table : la vitesse de l'air augmentant entre la table et la feuille, la pression qui diminue (encore l'effet Bernoulli !) plaque la feuille contre la table. De même, la vitesse du liquide (imposée par les oscillations), entre les grains et les parois, plaque les grains contre les parois. Après une petite propagation contre les parois, les particules se détachent et remontent normalement.

Si l'on augmente encore la fréquence de vibration, le phénomène s'accroît et la longueur sur laquelle l'écoulement granulaire suit la paroi inclinée augmente. L'écoulement finit toutefois par se détacher, et l'on observe la formation de «gouttes» de milieu granulaire. Si l'on augmente encore la fréquence, les gouttes deviennent oblongues, s'étirant horizontalement en remontant lentement ; vers le sommet, les gouttes sont si déformées qu'elles s'arrangent sous la forme de couches horizontales qui montent très lentement (voir la figure 4).

On explique encore ce phénomène de stratification par l'effet Bernoulli. Considérons une goutte de matière granulaire (voir la figure 5). La vibration provoque un mouvement de va-et-vient dans le liquide. Au sommet et à la base de la goutte, la vitesse relative du liquide est nulle ; en revanche, elle est importante sur les bords verticaux. Aussi la pression est supérieure en haut et en bas de la goutte, qui est donc écrasée. Ce même mécanisme devrait s'observer sur les bulles de gaz qui remontent dans un liquide. Je suis heureux de signaler aux lecteurs de *Pour la science* que cet effet de stratification des gouttes de liquide granulaire vient d'être découvert ; ils l'ont en avant-première.

**Pierre ÉVESQUE est directeur de recherche à l'École Centrale de Paris.**

**A. Ivanova, V. Kozlov et P. Évesque, *Europhysic Letters*, 35, p. 159-164, 1996.**

# Les ordinateurs mathématiciens !

JEAN-PAUL DELAHAYE

*Après le jeu d'échecs, l'intelligence artificielle triomphera-t-elle des mathématiques ?*

Il y a 40 ans que les calculatrices ont supplanté l'homme pour les calculs numériques. En revanche, c'est seulement depuis une dizaine d'années que le calcul symbolique par ordinateur (dérivation des fonctions, recherche de primitives, manipulation de polynômes, développements limités, etc.) a atteint une maturité qui en fait un allié de première importance dans certains domaines mathématiques et une aide appréciée des ingénieurs. La nouvelle formule de calcul de  $\pi$ , que nous avons traitée en janvier 1997, était un exemple frappant de cette avancée et des résultats produits par le calcul symbolique en mathématiques.

Un domaine mathématique subsiste où les progrès de la science informatique sont peu spectaculaires : la recherche de démonstrations par ordinateur.

Distinguons deux types de démonstrations mathématiques : celles qui ne sont que le développement de longs calculs (numériques ou symboliques) et celles qu'on obtient avec des méthodes où les raisonnements prédominent.

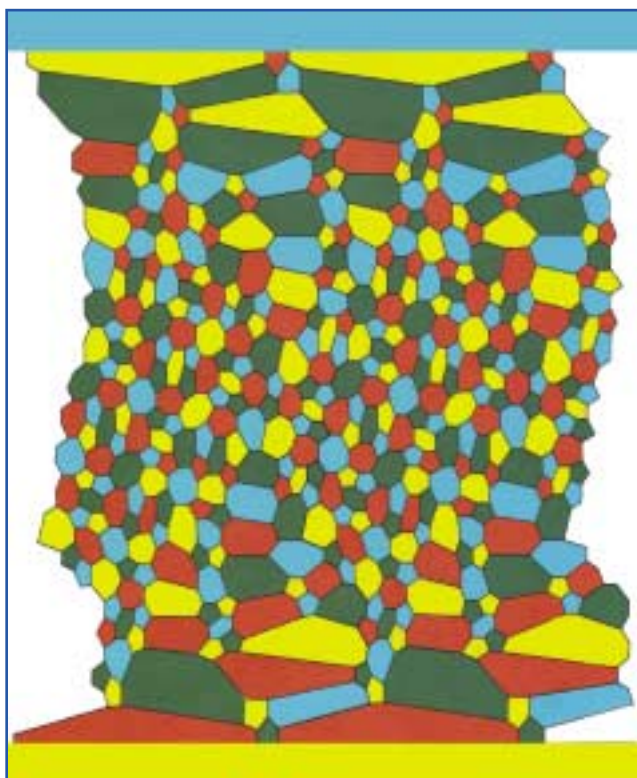
Pour le second type de démonstration, l'apport de l'informatique n'est pas convaincant : rares sont les énigmes anciennes intéressant vraiment les mathématiciens dont la réso-

lution a été obtenue par une démonstration automatique d'ordinateur.

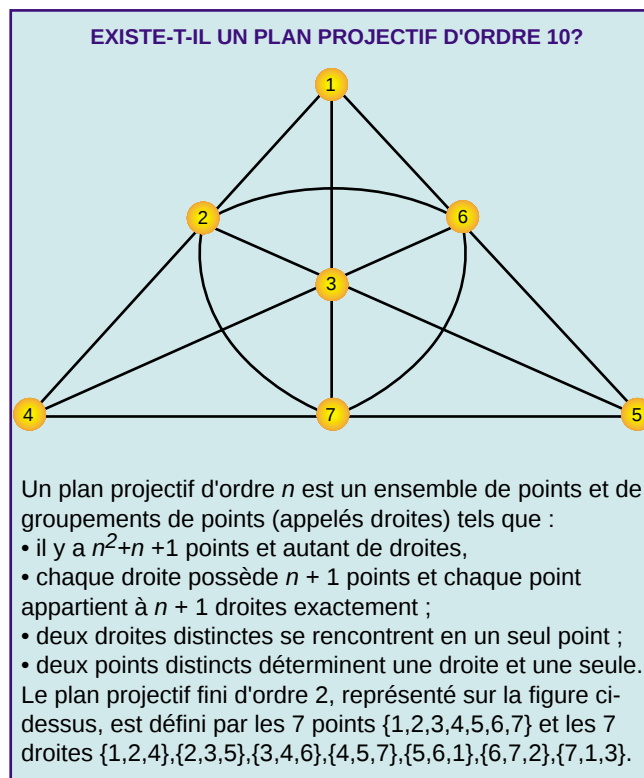
## LE THÉORÈME DES QUATRE COULEURS

On cite fréquemment le théorème des quatre couleurs : avec quatre couleurs, on peut toujours colorier les pays d'une carte géographique sans que deux voisins portent des couleurs identiques. Ce résultat, conjecturé en 1852 par Francis Guthrie, ne fut démontré qu'en juin 1976 par Kenneth Appel et Wolfgang Haken à l'aide d'un calcul par ordinateur. Toutefois, les idées et la structure de la démonstration étaient dues aux mathématiciens qui, pendant plus d'un siècle, avaient travaillé sur le problème. L'ordinateur, en 1976, s'est chargé d'un travail de recherche et de vérification trop long pour être mené à la main par un humain, mais qu'on peut difficilement considérer comme un raisonnement et encore moins comme un raisonnement créatif. L'ordinateur, dans la démonstration du théorème des quatre couleurs, quoique irremplaçable, n'a été qu'un assistant fiable et obstiné.

La preuve de K. Appel et W. Haken n'a jamais été vérifiée à la main. En fait, elle n'avait pas été vérifiée du tout, car, pour le faire par machine, il fallait saisir la description de 1 476 graphes



1. Illustration du problème des quatre couleurs résolu par ordinateur en 1976 et vérifié en 1996: peut-on colorier toute carte de façon que deux pays contigus n'aient pas la même couleur ?



2. Les mathématiciens ne pouvaient déterminer s'il existait un plan projectif d'ordre 10. Cette inexistence a été démontrée en 1988 sur un ordinateur programmé par C. Lam, L. Thiel et S. Swiercz.