



Roger-Viollet

La quadrature du carré

IAN STEWART

Comment paver un carré avec des carrés plus petits, tous de tailles différentes ?

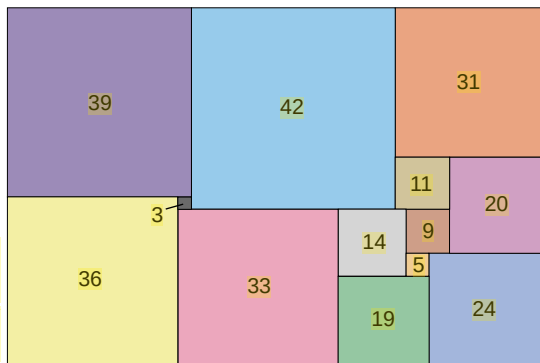
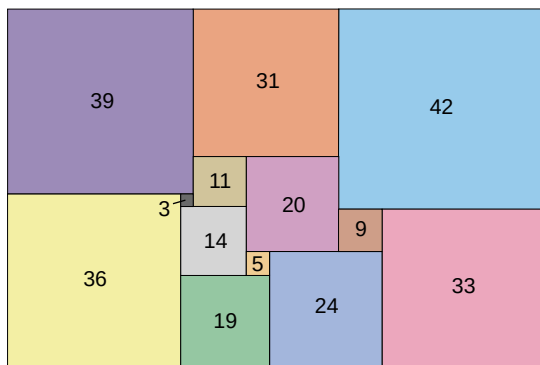
Le problème de la quadrature du cercle, apparu dans la Grèce antique, s'est révélé si difficile que le langage courant utilise son nom pour signifier une impossibilité. Le problème de la quadrature du carré, récent, subira-t-il le même sort ? Il s'agit de paver un carré avec des pavés carrés plus petits. Avec des pavés tous de même taille, le problème est facile : un échiquier n'est-il pas un carré pavé avec 64 petits carrés ? Compliquons alors le problème, et imposons d'utiliser des pavés carrés de tailles différentes.

En 1903, Max Dehn prouva que si un rectangle était pavable par des carrés, alors les côtés de ces carrés et ceux du rectangle formaient deux à deux des rapports rationnels (un nombre rationnel est le quotient de deux nombres

entiers). De ce fait, par un choix judicieux de l'unité de longueur, tous les côtés pouvaient être mesurés par des nombres entiers. Depuis, ce théorème a été démontré d'une dizaine de manières différentes.

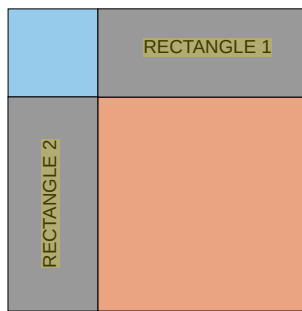
Nous conviendrons qu'un rectangle est «quadré» s'il existe un pavage par des carrés tous différents. En 1909, Z. Moron découvrit le premier rectangle 32×33 quadrable par neuf pavés carrés de côtés respectifs égaux à 1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15 et 18. Je vous invite à réaliser ces pavés en carton et à chercher l'assemblage en rectangle (la réponse se trouve dans *Unsolved Problems in Geometry*, par Hallard Croft, Kenneth Falconer et Richard Guy, éditions Springer-Verlag, New York, 1991). Moron quadra également un rectangle 47×65 avec dix carrés (voir la figure 2).

Puis, en 1939, R. Sprague résolut la quadrature du carré par 55 pavés différents. Toutefois sa solution manquait de pureté : il quadrerait le carré à l'aide de carrés... et d'un rectangle dont il donnait une quadrature, mais qui utilisait des pavés carrés déjà utilisés. Les quadratures sans aucun pavé rectangulaire sont aujourd'hui nommées simples, bien qu'elles soient plus difficiles à trouver.



Jennifer C. Christiansen

1. Avec un même ensemble de pavés carrés, on peut paver un rectangle 112×75 de deux manières (à gauche). Quand des pavés tous différents permettent de paver de deux façons un même rectangle, on peut associer ces deux pavages à deux carrés pour paver un carré plus grand (à droite).



Vers 1940, R. Brooks, C. Smith, A. Stone et W. Tutte découvrirent la première quadrature simple d'un carré : Martin Gardner, qui fut longtemps l'auteur des articles de *Visions mathématiques* dans cette même revue, a aussitôt expliqué leur méthode au grand public : ils partirent de la représentation d'un rectangle quadrable quelconque par un graphe nommé diagramme de Smith. Toute ligne horizontale du rectangle quadré correspond à un sommet de ce diagramme, et chaque pavé correspond à un arc. Cet arc lie les deux sommets correspondant aux droites horizontales qui rencontrent les côtés horizontaux du pavé, et il est indexé par la taille du pavé qu'il décrit.

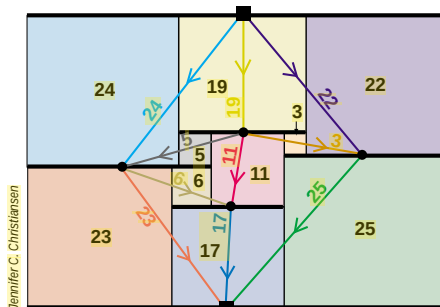
Si chaque arc du diagramme de Smith était un fil électrique de résistance égale à un ohm et si les indices étaient l'intensité (en ampère) des courants électriques passant par les fils, alors le diagramme total formerait un circuit électrique obéissant aux lois de Kirchhoff, qui décrivent les circuits réels. En donnant des signes opposés aux courants qui ont des sens opposés, ces lois sont :

1. L'intensité totale dans un sommet est nulle, sauf pour les sommets où le courant entre dans le circuit et pour ceux d'où il sort.

2. La somme algébrique des intensités le long d'un circuit fermé est nulle.

La validité de ces lois pour les rectangles quadrés résulte des propriétés géométriques de la quadrature. Par exemple, la seconde loi est vérifiée parce que la somme des côtés des carrés, le long du côté vertical gauche, est égale à la somme des côtés des carrés pour le côté droit. Utilisant les principes de la théorie des circuits électriques, les quatre mathématiciens mirent au point des méthodes systématiques pour construire ou analyser des rectangles quadrables, dans le dessein d'obtenir un carré simplement quadrable.

Le premier résultat fut inattendu : R. Brooks avait trouvé un rectangle 75×112 quadré par 13 pavés, et il avait construit le puzzle correspondant. Sa



2. Un rectangle carré peut être représenté par un circuit électrique. Chaque ligne horizontale correspond à un nœud. Le courant entre par le nœud supérieur et sort par le nœud inférieur. Son intensité, sur chaque fil conducteur (ou arête du graphe) est égale à la longueur du côté du carré.

mère joua avec...et reconstitua le rectangle, mais sa solution différait de celle de son fils. C'était la première fois que l'on trouvait ainsi un même rectangle quadrable de deux façons différentes.

On avait espéré trouver deux rectangles de même dimension, quadrables par des pavés différents, car, en ajoutant deux carrés, on aurait obtenu une quadrature de carré. Le rectangle de R. Brooks ne conduisait pas à une telle solution, car le même ensemble de pavés est utilisé dans les deux solutions. Toutefois, en examinant les deux diagrammes de Smith des deux pavages, les mathématiciens comprirent qu'en court-circuitant deux sommets d'un diagramme, ils obtenaient l'autre diagramme. Les deux points ainsi «identifiés» (le terme mathématique qui correspond au court-circuit) étaient au même potentiel électrique, de sorte que les courants électriques n'étaient pas modifiés.

Partant de cette observation, ils trouvèrent d'autres moyens d'utiliser les diagrammes de Smith et, finalement, trouvèrent un carré simplement quadrable par 69 pavés. R. Brooks trouva ensuite un carré simplement quadrable par seulement 39 pavés.

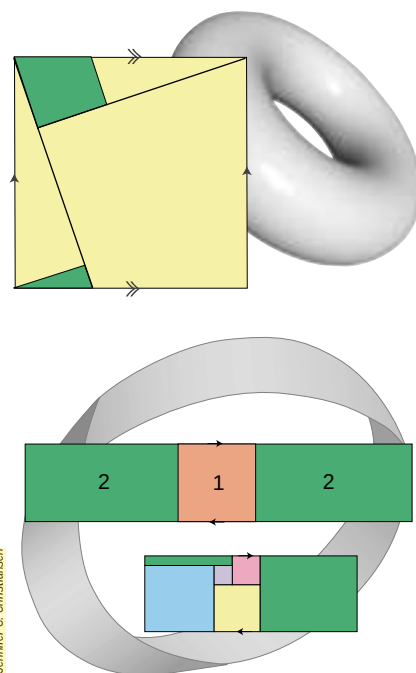
En 1948, T. Wilcocks trouva un carré quadrable par 24 pavés, mais le pavage n'était pas simple. Vers la même époque, J. Bouwkamp et ses collègues cataloguèrent tous les rectangles quadrables avec moins de 15 pavés : il en existe 3 663. En 1962, A. Duivestijn démontra que tout carré simplement quadrable doit contenir au moins 21 pavés ; puis, vers 1978, il trouva un tel carré et prouva qu'il était le seul à 21 pavés. En 1992, J. Bouwkamp et A. Duivestijn publièrent les 207 carrés simplement quadrables avec 21 à 25 pavés : leur liste est exhaustive.

Bien que ces résultats résolvent presque la quadrature du carré, bien des variantes du problème demeurent ouvertes. Comment quadrer les dominos, ou rectangles deux fois plus longs que larges ?

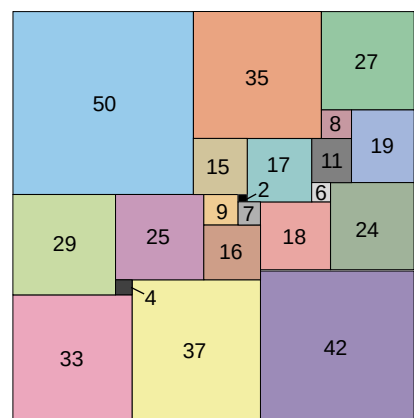
Il existe une quadrature évidente, avec deux carrés, mais en existe-t-il d'autres ?

Une autre possibilité consiste à paver d'autres surfaces que des rectangles : c'est ce qu'a étudié David Gale. Les topologistes savent que des surfaces intéressantes apparaissent quand on recolle (que l'on «identifie») les côtés opposés d'un rectangle, avec ou sans torsion. Le recollement sans torsion des deux premiers côtés d'un rectangle conduit à un cylindre. Si l'on recolle deux côtés opposés après avoir tordu le bord d'un demi-tour, on forme un ruban de Möbius (voir la figure 3). Quand on recolle les quatre côtés par paire de côtés opposés et sans torsion, on obtient un tore. Quand une paire de côtés est recollée après une torsion d'un demi-tour et que l'autre paire est recollée sans torsion, on obtient une bouteille de Klein, sans intérieur ni extérieur. Enfin, quand on recolle les côtés deux à deux, en tordant d'un demi-tour dans les deux cas, on obtient un plan projectif, impossible à représenter dans notre espace à trois dimensions.

Évidemment tout pavage du rectangle conduit à un pavage de la surface formée après un de ces recollements, mais cette surface peut posséder d'autres pavages que ceux du rectangle initial, parce que ses pavés peuvent déborder des bords du rectangle. La partie inférieure de la figure 3 montre un ruban de Möbius pavé avec deux carrés seulement, de côtés respectivement égaux à 1 et à 2. Les flèches indiquent les recollements. Bien



3. Tore (en haut) et ruban de Möbius (en bas) peuvent être pavés. Les côtés marqués de flèches similaires doivent être recollés, de sorte que les flèches coïncident. Les zones vertes forment alors un pavé, de même que les zones jaunes.



4. L'unique carré quadré par le nombre minimal de pavés : 21.

qu'un carré semble être coupé en deux rectangles, ces deux parties sont réunies lorsque les côtés sont identifiés. Cependant le pavage du ruban de Möbius a une propriété désagréable : le petit carré a une frontière commune avec lui-même. Deux de ses côtés opposés sont collés ensemble, de sorte qu'il devient lui-même un ruban de Möbius, et non un carré. En 1993, S. Chapman découvrit un pavage du ruban de Möbius sans cette particularité, avec cinq pavés (bande inférieure de la figure 3). Aucun pavage ne comporte moins de pavés.

Un cylindre peut également être quadré, mais avec au moins neuf pavés, comme pour les rectangles. Des pavages «triviaux» proviennent simplement des rectangles de Moron, avec un recollement des deux côtés, mais il existe également d'autres pavages non triviaux à neuf pavés. Ces derniers ont la même taille que les pavés de Moron.

Pour le cylindre comme pour le ruban de Möbius, les côtés des carrés doivent être parallèles aux bords des surfaces. Cependant ni le tore, ni la bouteille de Klein, ni le plan projectif n'ont de bords, de sorte que les pavés peuvent être également en biais. De fait, on peut ainsi paver un tore avec seulement deux carrés, pourvu que l'on accepte que deux côtés d'un même carré se touchent (en prime, une preuve du théorème de Pythagore est cachée dans cette figure : la voyez-vous ?).

On connaît mal le pavage d'une bouteille de Klein. Tout pavage d'un ruban de Möbius donne celui de la bouteille de Klein par recollement du ruban le long de son unique bord, et il n'existe pas d'autre manière de paver une telle bouteille avec au plus six pavés carrés. On ignore si la propriété reste vraie pour sept ou huit pavés, et l'on sait qu'elle est fautive pour neuf pavés.

Enfin le pavage du plan projectif est un problème ouvert, tout comme le pavage du cube : à vous !