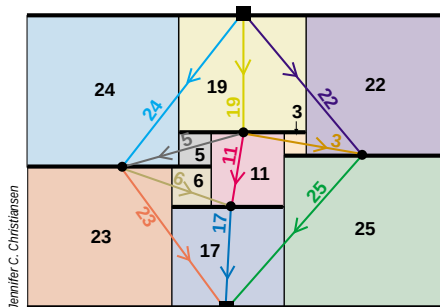




2. Un rectangle carré peut être représenté par un circuit électrique. Chaque ligne horizontale correspond à un nœud. Le courant entre par le nœud supérieur et sort par le nœud inférieur. Son intensité, sur chaque fil conducteur (ou arête du graphe) est égale à la longueur du côté du carré.

mère joua avec...et reconstitua le rectangle, mais sa solution différait de celle de son fils. C'était la première fois que l'on trouvait ainsi un même rectangle quadrable de deux façons différentes.

On avait espéré trouver deux rectangles de même dimension, quadrables par des pavés différents, car, en ajoutant deux carrés, on aurait obtenu une quadrature de carré. Le rectangle de R. Brooks ne conduisait pas à une telle solution, car le même ensemble de pavés est utilisé dans les deux solutions. Toutefois, en examinant les deux diagrammes de Smith des deux pavages, les mathématiciens comprirent qu'en court-circuitant deux sommets d'un diagramme, ils obtenaient l'autre diagramme. Les deux points ainsi «identifiés» (le terme mathématique qui correspond au court-circuit) étaient au même potentiel électrique, de sorte que les courants électriques n'étaient pas modifiés.

Partant de cette observation, ils trouvèrent d'autres moyens d'utiliser les diagrammes de Smith et, finalement, trouvèrent un carré simplement quadrable par 69 pavés. R. Brooks trouva ensuite un carré simplement quadrable par seulement 39 pavés.

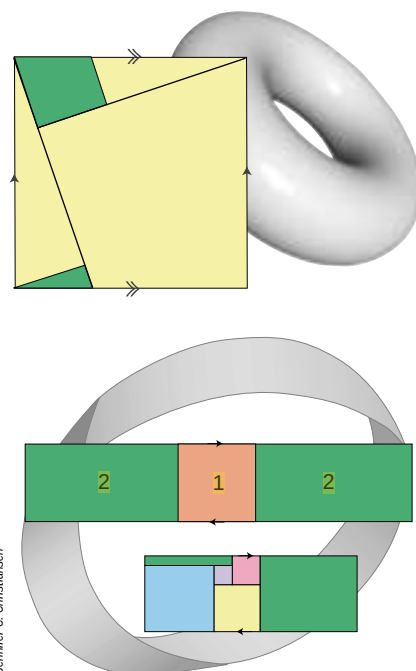
En 1948, T. Wilcocks trouva un carré quadrable par 24 pavés, mais le pavage n'était pas simple. Vers la même époque, J. Bouwkamp et ses collègues cataloguèrent tous les rectangles quadrables avec moins de 15 pavés : il en existe 3 663. En 1962, A. Duivestijn démontra que tout carré simplement quadrable doit contenir au moins 21 pavés ; puis, vers 1978, il trouva un tel carré et prouva qu'il était le seul à 21 pavés. En 1992, J. Bouwkamp et A. Duivestijn publièrent les 207 carrés simplement quadrables avec 21 à 25 pavés : leur liste est exhaustive.

Bien que ces résultats résolvent presque la quadrature du carré, bien des variantes du problème demeurent ouvertes. Comment quadrer les dominos, ou rectangles deux fois plus longs que larges ?

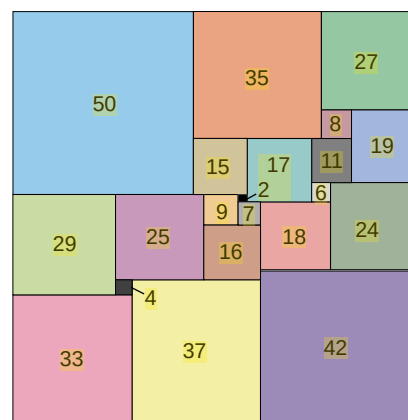
Il existe une quadrature évidente, avec deux carrés, mais en existe-t-il d'autres ?

Une autre possibilité consiste à paver d'autres surfaces que des rectangles : c'est ce qu'a étudié David Gale. Les topologistes savent que des surfaces intéressantes apparaissent quand on recolle (que l'on «identifie») les côtés opposés d'un rectangle, avec ou sans torsion. Le recollement sans torsion des deux premiers côtés d'un rectangle conduit à un cylindre. Si l'on recolle deux côtés opposés après avoir tordu le bord d'un demi-tour, on forme un ruban de Möbius (voir la figure 3). Quand on recolle les quatre côtés par paire de côtés opposés et sans torsion, on obtient un tore. Quand une paire de côtés est recollée après une torsion d'un demi-tour et que l'autre paire est recollée sans torsion, on obtient une bouteille de Klein, sans intérieur ni extérieur. Enfin, quand on recolle les côtés deux à deux, en tordant d'un demi-tour dans les deux cas, on obtient un plan projectif, impossible à représenter dans notre espace à trois dimensions.

Évidemment tout pavage du rectangle conduit à un pavage de la surface formée après un de ces recollements, mais cette surface peut posséder d'autres pavages que ceux du rectangle initial, parce que ses pavés peuvent déborder des bords du rectangle. La partie inférieure de la figure 3 montre un ruban de Möbius pavé avec deux carrés seulement, de côtés respectivement égaux à 1 et à 2. Les flèches indiquent les recollements. Bien



3. Tore (en haut) et ruban de Möbius (en bas) peuvent être pavés. Les côtés marqués de flèches similaires doivent être recollés, de sorte que les flèches coïncident. Les zones vertes forment alors un pavé, de même que les zones jaunes.



4. L'unique carré quadré par le nombre minimal de pavés : 21.

qu'un carré semble être coupé en deux rectangles, ces deux parties sont réunies lorsque les côtés sont identifiés. Cependant le pavage du ruban de Möbius a une propriété désagréable : le petit carré a une frontière commune avec lui-même. Deux de ses côtés opposés sont collés ensemble, de sorte qu'il devient lui-même un ruban de Möbius, et non un carré. En 1993, S. Chapman découvrit un pavage du ruban de Möbius sans cette particularité, avec cinq pavés (bande inférieure de la figure 3). Aucun pavage ne comporte moins de pavés.

Un cylindre peut également être quadré, mais avec au moins neuf pavés, comme pour les rectangles. Des pavages «triviaux» proviennent simplement des rectangles de Moron, avec un recollement des deux côtés, mais il existe également d'autres pavages non triviaux à neuf pavés. Ces derniers ont la même taille que les pavés de Moron.

Pour le cylindre comme pour le ruban de Möbius, les côtés des carrés doivent être parallèles aux bords des surfaces. Cependant ni le tore, ni la bouteille de Klein, ni le plan projectif n'ont de bords, de sorte que les pavés peuvent être également en biais. De fait, on peut ainsi paver un tore avec seulement deux carrés, pourvu que l'on accepte que deux côtés d'un même carré se touchent (en prime, une preuve du théorème de Pythagore est cachée dans cette figure : la voyez-vous?).

On connaît mal le pavage d'une bouteille de Klein. Tout pavage d'un ruban de Möbius donne celui de la bouteille de Klein par recollement du ruban le long de son unique bord, et il n'existe pas d'autre manière de paver une telle bouteille avec au plus six pavés carrés. On ignore si la propriété reste vraie pour sept ou huit pavés, et l'on sait qu'elle est fautive pour neuf pavés.

Enfin le pavage du plan projectif est un problème ouvert, tout comme le pavage du cube : à vous !