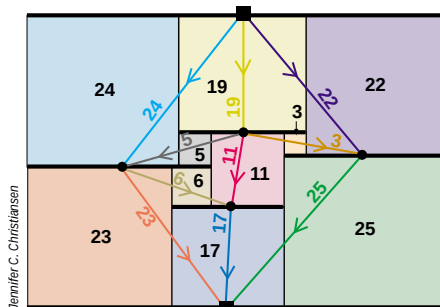




2. Un rectangle carré peut être représenté par un circuit électrique. Chaque ligne horizontale correspond à un nœud. Le courant entre par le nœud supérieur et sort par le nœud inférieur. Son intensité, sur chaque fil conducteur (ou arête du graphe) est égale à la longueur du côté du carré.

mère joua avec...et reconstitua le rectangle, mais sa solution différait de celle de son fils. C'était la première fois que l'on trouvait ainsi un même rectangle quadrable de deux façons différentes.

On avait espéré trouver deux rectangles de même dimension, quadrables par des pavés différents, car, en ajoutant deux carrés, on aurait obtenu une quadrature de carré. Le rectangle de R. Brooks ne conduisait pas à une telle solution, car le même ensemble de pavés est utilisé dans les deux solutions. Toutefois, en examinant les deux diagrammes de Smith des deux pavages, les mathématiciens comprirent qu'en court-circuitant deux sommets d'un diagramme, ils obtenaient l'autre diagramme. Les deux points ainsi «identifiés» (le terme mathématique qui correspond au court-circuit) étaient au même potentiel électrique, de sorte que les courants électriques n'étaient pas modifiés.

Partant de cette observation, ils trouvèrent d'autres moyens d'utiliser les diagrammes de Smith et, finalement, trouvèrent un carré simplement quadrable par 69 pavés. R. Brooks trouva ensuite un carré simplement quadrable par seulement 39 pavés.

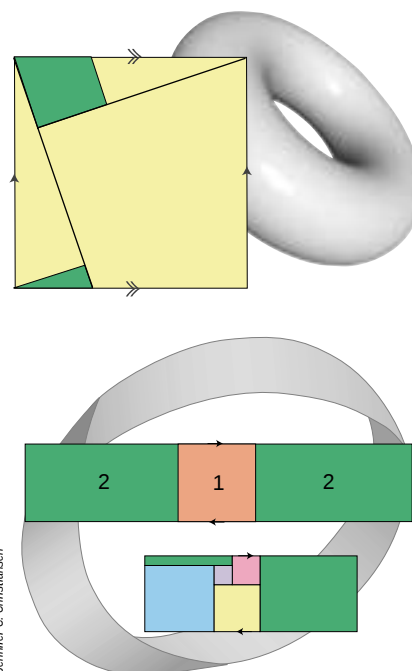
En 1948, T. Wilcocks trouva un carré quadrable par 24 pavés, mais le pavage n'était pas simple. Vers la même époque, J. Bouwkamp et ses collègues cataloguèrent tous les rectangles quadrables avec moins de 15 pavés : il en existe 3 663. En 1962, A. Duivestijn démontra que tout carré simplement quadrable doit contenir au moins 21 pavés ; puis, vers 1978, il trouva un tel carré et prouva qu'il était le seul à 21 pavés. En 1992, J. Bouwkamp et A. Duivestijn publièrent les 207 carrés simplement quadrables avec 21 à 25 pavés : leur liste est exhaustive.

Bien que ces résultats résolvent presque la quadrature du carré, bien des variantes du problème demeurent ouvertes. Comment quadrer les dominos, ou rectangles deux fois plus longs que larges ?

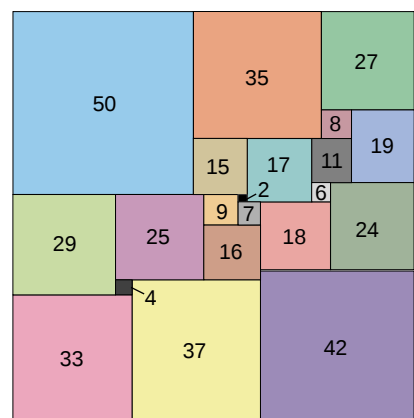
Il existe une quadrature évidente, avec deux carrés, mais en existe-t-il d'autres ?

Une autre possibilité consiste à paver d'autres surfaces que des rectangles : c'est ce qu'a étudié David Gale. Les topologistes savent que des surfaces intéressantes apparaissent quand on recolle (que l'on «identifie») les côtés opposés d'un rectangle, avec ou sans torsion. Le recollement sans torsion des deux premiers côtés d'un rectangle conduit à un cylindre. Si l'on recolle deux côtés opposés après avoir tordu le bord d'un demi-tour, on forme un ruban de Möbius (voir la figure 3). Quand on recolle les quatre côtés par paire de côtés opposés et sans torsion, on obtient un tore. Quand une paire de côtés est recollée après une torsion d'un demi-tour et que l'autre paire est recollée sans torsion, on obtient une bouteille de Klein, sans intérieur ni extérieur. Enfin, quand on recolle les côtés deux à deux, en tordant d'un demi-tour dans les deux cas, on obtient un plan projectif, impossible à représenter dans notre espace à trois dimensions.

Évidemment tout pavage du rectangle conduit à un pavage de la surface formée après un de ces recollements, mais cette surface peut posséder d'autres pavages que ceux du rectangle initial, parce que ses pavés peuvent déborder des bords du rectangle. La partie inférieure de la figure 3 montre un ruban de Möbius pavé avec deux carrés seulement, de côtés respectivement égaux à 1 et à 2. Les flèches indiquent les recollements. Bien



3. Tore (en haut) et ruban de Möbius (en bas) peuvent être pavés. Les côtés marqués de flèches similaires doivent être recollés, de sorte que les flèches coïncident. Les zones vertes forment alors un pavé, de même que les zones jaunes.



4. L'unique carré quadré par le nombre minimal de pavés : 21.

qu'un carré semble être coupé en deux rectangles, ces deux parties sont réunies lorsque les côtés sont identifiés. Cependant le pavage du ruban de Möbius a une propriété désagréable : le petit carré a une frontière commune avec lui-même. Deux de ses côtés opposés sont collés ensemble, de sorte qu'il devient lui-même un ruban de Möbius, et non un carré. En 1993, S. Chapman découvrit un pavage du ruban de Möbius sans cette particularité, avec cinq pavés (bande inférieure de la figure 3). Aucun pavage ne comporte moins de pavés.

Un cylindre peut également être quadré, mais avec au moins neuf pavés, comme pour les rectangles. Des pavages «triviaux» proviennent simplement des rectangles de Moron, avec un recollement des deux côtés, mais il existe également d'autres pavages non triviaux à neuf pavés. Ces derniers ont la même taille que les pavés de Moron.

Pour le cylindre comme pour le ruban de Möbius, les côtés des carrés doivent être parallèles aux bords des surfaces. Cependant ni le tore, ni la bouteille de Klein, ni le plan projectif n'ont de bords, de sorte que les pavés peuvent être également en biais. De fait, on peut ainsi paver un tore avec seulement deux carrés, pourvu que l'on accepte que deux côtés d'un même carré se touchent (en prime, une preuve du théorème de Pythagore est cachée dans cette figure : la voyez-vous ?).

On connaît mal le pavage d'une bouteille de Klein. Tout pavage d'un ruban de Möbius donne celui de la bouteille de Klein par recollement du ruban le long de son unique bord, et il n'existe pas d'autre manière de paver une telle bouteille avec au plus six pavés carrés. On ignore si la propriété reste vraie pour sept ou huit pavés, et l'on sait qu'elle est fautive pour neuf pavés.

Enfin le pavage du plan projectif est un problème ouvert, tout comme le pavage du cube : à vous !



L'art du tri

JEAN-PAUL DELAHAYE

La loi du moindre effort dans les méthodes de tri de données ou de cartes. Gagnez un temps précieux !

Pour vérifier qu'un jeu est complet ou identifier les cartes absentes, pour préparer certains tours de prestidigitation ou un tournoi de bridge, il faut trier les cartes. Les problèmes posés par ces tris ressemblent à ceux que doivent traiter les informaticiens pour classer des données. Pour les résoudre, une science inattendue de l'économie des gestes et du travail a été mise en œuvre.

Les mathématiciens ont compris il y a 40 ans que trier n'était pas si simple et, depuis, ils ont étudié comment préserver le précieux temps de calcul des ordinateurs. Parmi des dizaines de méthodes proposées, certains algorithmes remarquables de tri informatique s'adaptent au classement des cartes et illustrent que le plus rapide n'est pas le plus simple. Mais, comme on le verra aussi, le classement des cartes a ses propres subtilités.

LE TRI PAR INSERTION

Le tri *par insertion* est sans doute le plus naturel de tous les tris à la main, et c'est d'ailleurs celui que la plupart des gens utilisent pour classer leurs cartes quand ils ramassent leur main au bridge ou quand ils doivent trier alphabétiquement des noms, des fiches, ou des livres.

L'algorithme de tri par insertion est le suivant : on prend les cartes une à une, et l'on compose un nouveau paquet en plaçant chaque carte qu'on introduit à la place qu'elle doit avoir parmi celles qui sont déjà placées. À chaque instant du tri par insertion, une partie du paquet est parfaitement classée et l'autre encore désordonnée.

On mesure la complexité d'un tri en comptant le nombre de comparaisons entre deux cartes (ou deux nombres s'il s'agit de nombres) qu'on doit faire pour classer l'ensemble. Plus ce nombre est grand, moins bon est le tri ; plus il est petit, meilleur il est.

Étudions ce qui se passe pour le tri par insertion. Quand on place la première carte, on n'effectue aucune comparaison. Quand on place la seconde carte, on effectue une comparaison : il faut savoir si la carte qu'on introduit est plus faible ou plus forte que celle qui est déjà placée. Quand on place la troisième carte, on effectue deux comparaisons : la carte nouvelle est comparée avec chacune des deux cartes déjà en place pour savoir si elle doit se placer devant les deux, au milieu ou derrière. Et ainsi de suite : le placement de la carte numéro p peut nécessiter $p - 1$ comparaisons. Au total donc, on aura effectué au plus $1 + 2 + \dots + (n - 1) = n(n - 1)/2$ comparaisons quand la n -ième carte aura été placée. J'ai bien précisé «au plus», car, quand vous placez la carte numéro p , vous n'avez vraiment besoin d'effectuer $p - 1$ comparaisons que si sa place est en dernier (vous pouvez placer la carte p dès que vous rencontrez une carte plus forte).

Pour 10 données, cela fait au plus 45 comparaisons ; pour 100 données, au plus 4 950 ; pour 1 000 données, au plus 499 500. Pour obtenir le nombre moyen de comparaisons, il faut diviser ces nombres par 2.

L'augmentation du travail à faire (dans le pire cas, ou en moyenne) est une fonction polynôme de degré deux du nombre de cartes. On dit que l'algorithme est quadratique et en pratique cela signifie qu'il devient rapidement inutilisable.

LE TRI-RAPIDE

Le tri-rapide est plus difficile à effectuer, mais le jeu en vaut la chandelle, car il nécessite, au total, bien moins de comparaisons. Son avantage par rapport au tri par insertion est très net quand le nombre de cartes à trier augmente. Nous décrivons cet algorithme par étapes.

Étape 1. On prend la première carte (qu'on appellera carte pivot), on la place sur la table au milieu et en haut. La carte pivot constitue la ligne 1. On forme alors deux paquets en comparant toutes les cartes restantes avec la carte pivot : les cartes plus faibles sont mises en paquet à gauche sur la ligne 2, les plus fortes sont mises à droite sur la ligne 2 (voir la figure 2).

Étape 2. On prend toutes les cartes du paquet de gauche de la ligne 2, sauf la première qui sert comme précédemment de carte pivot et qu'on laisse sur la ligne 2. On sépare comme précédemment ce paquet en deux nouveaux paquets plus petits qu'on place sur la troisième ligne. Le paquet de droite de la ligne 2 est traité de la même manière. Il y a donc maintenant une carte sur la ligne 1, deux sur la ligne 2, et quatre petits paquets sur la ligne 3.

Étape 3. On retire une carte de chaque paquet de la ligne 3 qui y reste et l'on sépare le reste de chaque paquet comme précédemment en deux, ce qui donne en tout 8 paquets qu'on place sur la ligne 4.

On continue de même jusqu'à n'avoir plus que des cartes seules, chaque paquet ayant été totalement fractionné. Les cartes sont alors disposées en une structure ressemblant à un arbre à l'envers. À chaque carte de l'arbre sur la ligne n sont associées deux cartes au plus de la ligne $n + 1$, qu'on appellera ses fils gauche et droit ; la carte sera bien sûr appelée la carte père de ses deux fils (le mouvement *Politically Correct*, aux États-Unis, oblige les informaticiens à parler de cartes filles et de cartes mères, mais en France nous pouvons garder une certaine liberté de langage).

Quand toutes les cartes sont ainsi disposées en un arbre à l'envers, on les ramasse en «repliant l'arbre» jusqu'à n'avoir plus qu'un seul paquet (qui est alors classé) : on repère un paquet sur une ligne n n'ayant aucun paquet asso-