



# Statut mathématique des contradictions

JEAN-PAUL DELAHAYE

*Comme les physiciens, les mathématiciens proposent des théories provisoires, infirmées par des contradictions. Celles-ci ne menacent pas les mathématiques, mais sont sources d'inspiration.*

Un étudiant demanda au logicien anglais Bertrand Russell : «Prétendez-vous que de  $2 + 2 = 5$ , on peut déduire que vous êtes le pape?» «Certainement, répliqua le grand logicien... Réfléchissez un peu. Supposons que  $2 + 2 = 5$ . En soustrayant 2 de chaque côté du signe égal, on obtient que  $2 = 3$ . Par symétrie, on a aussi que  $3 = 2$  et, en soustrayant un de chaque côté,  $2 = 1$ . Maintenant le pape et moi nous sommes deux, mais, puisque  $2 = 1$ , le pape et moi ne sommes qu'un, et donc je suis le pape.»

Cette propriété de la logique classique, appelée *ex-falso quodlibet*, énonce que, si une proposition est à la fois fausse et vraie, alors tout autre énoncé est vrai ; dans l'exemple, Russell est le pape...

Donc, si vous prouvez que  $0 = 1$ , comme vous savez que  $0 \neq 1$ , vous pouvez en déduire, généralement en raisonnant par l'absurde, que n'importe quel théorème mathématique est vrai, et, par exemple, qu'il existe une infinité de nombres premiers pairs ! Une seule contradiction détruirait-elle l'édifice mathématique, une montagne de merveilles édifiée par 40 siècles de travail ?

Heureusement, les mathématiciens n'envisagent pas sérieusement qu'une affirmation soit à la fois vraie et fausse : la contradiction leur est insupportable, et ils font tout pour l'éviter. Ils classent les énoncés mathématiques en deux catégories, les vrais et les faux, et tentent de savoir à quelle catégorie chacun appartient. Ils ne réussissent pas toujours, et certains problèmes restent ouverts des années, voire des siècles.

De surcroît, certaines questions sont si délicates que les mathématiciens ne

savent pas s'ils pourront jamais trancher : ces propositions sont indécidables, ni vraies ni fausses.

Dans une théorie possédant une contradiction, pour éviter que tout ne s'effondre dans le non-sens, il faudrait s'interdire de raisonner par l'absurde. Impossible, car tout le monde accepte ce principe de raisonnement, l'instrument de travail quotidien du mathématicien. Même les mathématiciens intuitionnistes (lesquels, par peur des contradictions dont l'infini pourrait être responsable, choisissent d'utiliser une logique moins puissante que la logique classique) conservent le raisonnement par l'absurde.

## THÉORIES CONTRADICTOIRES À JETER

Plusieurs fois dans l'histoire des mathématiques, des contradictions ont provoqué de graves inquiétudes.

Les Grecs ressentirent la découverte de l'irrationalité de la diagonale du carré (autrement dit, que  $\sqrt{2}$  n'est pas le quotient de deux entiers) comme une contradiction, car ils pensaient implicitement que toute grandeur pouvait être exprimée par une fraction. La diagonale du carré existait géométriquement, mais pas en tant que nombre ! Il fallait définir un autre type de nombre. Cela n'était pas aisé, et pendant des siècles les mathématiciens se méfièrent des extensions de la notion de nombres : ils se replièrent sur la géométrie, et il a fallu plus d'un millénaire pour qu'ils s'en dégagent.

Au XVIII<sup>e</sup> siècle, les premières présentations du calcul infinitésimal de Newton et de Leibniz permettaient d'obtenir sans mal une démonstration de  $0 = 1$  (c'est-à-dire une contradiction). C'est d'ailleurs pour cela que l'évêque Berkeley, fondateur de la doctrine idéaliste, refusait de prendre au sérieux ce nouveau calcul, et disait, non sans humour, que,

lorsqu'on croit au calcul des fluxions (nom donné par Newton à sa théorie), il n'est pas difficile de croire aux mystères de la religion. Curieux argument de la part d'un évêque !

Plus tard encore, à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, la première version de la théorie des ensembles, formalisée par Frege, permettait de mener un raisonnement analogue à celui concernant le barbier qui rase tous les barbiers qui ne se rasent pas eux-mêmes (se rase-t-il lui-même ?). Craignant une contamination de toutes les mathématiques, le grand Henri Poincaré avait proposé de renoncer complètement à la très prometteuse théorie des ensembles.

Plus récemment, certains physiciens utilisaient dans leurs calculs ce qu'ils appellent la fonction d'Heaviside ; cette fonction n'est pas conforme avec ce que l'on considère habituellement comme une fonction. Les calculs auraient amené des contradictions si on les avait pris au pied de la lettre.

Pourtant jamais, au grand jamais, ces absurdités apparentes n'ont entraîné de catastrophes majeures : elles ont, au contraire, été bénéfiques.

## GUÉRISONS DES THÉORIES MALADES

Circonscrire une contradiction revient souvent à renoncer à un principe qu'on croyait évident. Dans le cas des irrationnels, il a fallu renoncer à l'idée que deux grandeurs sont toujours commensurables. Ce renoncement élimine la contradiction et, bien loin d'en être irrémédiablement perturbée, la théorie des nombres s'est nourrie des irrationnels.

Le calcul infinitésimal a été établi sur des fondements solides, d'abord au XVIII<sup>e</sup> et au XIX<sup>e</sup> siècle par la mise au point de bonnes règles de calcul et l'introduction d'une notion rigoureuse

de limite, puis plus récemment, au  $xx^e$  siècle, grâce à l'analyse non standard qui définit une manipulation non contradictoire des infinis petits. Cela a donné raison à ceux qui avaient eu le génie de prendre quelques risques et tort à l'évêque Berkeley qui voulait tout rejeter.

Pour remédier aux contradictions des nouvelles méthodes d'analyse, les mathématiciens utilisent les quantités avec lesquelles ils veulent calculer (infinésimales, sommes et produits infinis), mais sans suivre certaines règles de manipulation de l'algèbre qu'on croyait intangibles et consubstantielles. Par exemple, selon la façon de placer les parenthèses, la somme :

$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$   
vaut 0 ou 1 :

$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots = 0$

$1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots = 1 + 0 + 0 + 0 + \dots = 1$

Pour éviter cette contradiction, il faut d'abord admettre que toute somme infinie ne désigne pas un nombre : ici, la somme infinie n'a pas de sens. Les manipulations effectuées ne signifient rien, et la contradiction obtenue n'a pas à être acceptée.

Même lorsque les sommes infinies ont un sens, les opérations qu'on faisait sur les sommes finies ne sont plus nécessairement autorisées. C'est ce que montre la somme infinie suivante :

$s = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6 + 1/7 - 1/8 + 1/9 - 1/10 + 1/11 \dots$

En changeant l'ordre des termes et en les regroupant, on obtient :

$s = (1 - 1/2) - 1/4 + (1/3 - 1/6) - 1/8 + (1/5 - 1/10) - 1/12 + \dots$   
 $= 1/2 - 1/4 + 1/6 - 1/8 + 1/10 - 1/12 + \dots = 1/2 (1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6 + 1/7 - 1/8 + \dots) = 1/2 s$

Alors  $s = 1/2 s$ , donc  $s = 0$ , ce qui contredit le fait qu'en regroupant les termes deux par deux, dans l'ordre, la somme  $(1 - 1/2) + (1/3 - 1/4) + \dots$  est une somme de nombres strictement positifs, donc strictement positive. La somme infinie  $s$ , si l'on accepte d'en permuter les termes et de les regrouper, est à la fois nulle et strictement positive ! Pour éviter cette contradiction, il faut renoncer à changer l'ordre des termes des séries infinies, même si elles sont convergentes. Quelques précautions de ce genre et l'élaboration du concept de limite éliminent toutes les contradictions des méthodes de calcul introduites par Newton et par Leibniz.

La théorie des ensembles a su se prémunir des antinomies (noms donnés alors aux contradictions qu'on y a trouvées) et elle constitue aujourd'hui un socle pour toutes les mathématiques,

dont elle a unifié et simplifié la présentation. Dans son cas, plusieurs remèdes différents ont été proposés. L'axiomatisation de Zermelo-Fraenkel est la plus souvent adoptée : elle se fonde sur l'idée que n'importe quel regroupement d'objets ne doit pas être considéré comme un ensemble et qu'en particulier les regroupements trop gros (comme celui de tous les ensembles) sont à éviter. Même si la solution retenue aujourd'hui apparaît *ad hoc* à certains logiciens, elle fonctionne parfaitement, et, depuis plus de 70 ans, aucune nouvelle antinomie n'a été découverte.

Le calcul des distributions, inventé par Laurent Schwartz dans les années 1950, a justifié *a posteriori* les fantaisies des physiciens. Il se fonde sur une généralisation de la notion de fonction continue, qu'on appelle distribution ; dans un cadre nettoyé de toute contradiction, ce qui est devenu la «distribution d'Heaviside»

a pu s'épanouir. Dans cette théorie, même les distributions correspondant à des fonctions non continues sont dérivables (et on peut même y dériver les fonctions 1,5 fois ou  $\pi$  fois!).

Notons que d'autres méthodes de calcul utilisées en physique (par exemple les techniques dites de renormalisation qui consistent à faire des manipulations étranges avec des quantités infinies) n'ont pas aujourd'hui de justifications mathématiques totalement satisfaisantes (autrement dit, sont contradictoires dans les cadres actuels où l'on pourrait les faire tenir) et attendent leur sauveur.

Confrontés à une contradiction, les mathématiciens réussissent toujours à l'éliminer, et une contradiction n'a jamais durablement mis en danger les mathématiques. Mieux, en stimulant la recherche, toute contradiction amène un enrichissement. La situation en mathématiques serait donc semblable à celle

## 1. *Ex-falso quodlibet* : une contradiction implique que tout est vrai

**L**e *ex-falso quodlibet* est un principe qui indique qu'une contradiction permet de tout démontrer. Il lui correspond la formule logique :  $(A \text{ et non } A) \rightarrow B$ . Ce principe est choquant : aussi allons-nous le démontrer de deux façons :

### 1. Démonstration de *ex-falso quodlibet* en utilisant le raisonnement par l'absurde.

Ce raisonnement par l'absurde fonctionne selon le schéma suivant :

Pour démontrer B (que B est vrai), **je suppose que B est faux** (non B) et je m'arrange pour en tirer une contradiction ; dès que j'ai réussi, j'en déduis que l'hypothèse – B est faux – est responsable de cette contradiction, et donc que **B est vrai**.

Admettons le raisonnement par l'absurde et prouvons le *ex-falso quodlibet*.

Je suppose que  $(A \text{ et non } A)$  et je veux obtenir B. **Pour cela, je suppose que B est faux**. Je m'arrange pour en tirer une contradiction. C'est facile, puisque je l'ai déjà avec  $(A \text{ et non } A)$ . **Donc B est vrai**.

Ce court raisonnement est aussi utile qu'étonnant : il fait passer du raisonnement par l'absurde, facile à accepter, au *ex-falso quodlibet*, difficile à admettre.

### 2. Déduisons maintenant le principe du *ex-falso quodlibet* par une autre méthode.

Nous acceptons les cinq principes de raisonnement suivants :

(1) Principe de la contraposition :  $(C \rightarrow D)$  équivaut à  $(\text{non } D \rightarrow \text{non } C)$

(2) La loi de De Morgan :  $\text{non } (E \text{ ou } F)$  équivaut à  $(\text{non } E \text{ et non } F)$

(3) Tiers exclu :  $\text{non } A \text{ ou } A$

(4) Principe de double négation :  $(\text{non non } A)$  équivaut à A

(5) si A est vrai, alors A est toujours vrai lorsqu'on suppose B :

de A, on peut déduire  $B \rightarrow A$

Partons du tiers exclu :

**non A ou A**

Du principe (5), on déduit que :

**non B  $\rightarrow$  (non A ou A)**

Par contraposition, on en tire :

**non (non A ou A)**

**$\rightarrow$  non non B**

Par utilisation de la loi de

De Morgan et simplification

de  $(\text{non non } A)$  en A et de  $(\text{non non } B)$  en B, on a

alors :  **$(A \text{ et non } A) \rightarrow B$ .**



Bibliothèque municipale de Cambrai