

de limite, puis plus récemment, au xx^e siècle, grâce à l'analyse non standard qui définit une manipulation non contradictoire des infinis petits. Cela a donné raison à ceux qui avaient eu le génie de prendre quelques risques et tort à l'évêque Berkeley qui voulait tout rejeter.

Pour remédier aux contradictions des nouvelles méthodes d'analyse, les mathématiciens utilisent les quantités avec lesquelles ils veulent calculer (infinimentaux, sommes et produits infinis), mais sans suivre certaines règles de manipulation de l'algèbre qu'on croyait intangibles et consubstantielles. Par exemple, selon la façon de placer les parenthèses, la somme :

$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$
vaut 0 ou 1 :

$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots = 0$

$1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots = 1 + 0 + 0 + 0 + \dots = 1$

Pour éviter cette contradiction, il faut d'abord admettre que toute somme infinie ne désigne pas un nombre : ici, la somme infinie n'a pas de sens. Les manipulations effectuées ne signifient rien, et la contradiction obtenue n'a pas à être acceptée.

Même lorsque les sommes infinies ont un sens, les opérations qu'on faisait sur les sommes finies ne sont plus nécessairement autorisées. C'est ce que montre la somme infinie suivante :

$s = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6 + 1/7 - 1/8 + 1/9 - 1/10 + 1/11 \dots$

En changeant l'ordre des termes et en les regroupant, on obtient :

$s = (1 - 1/2) - 1/4 + (1/3 - 1/6) - 1/8 + (1/5 - 1/10) - 1/12 + \dots$
 $= 1/2 - 1/4 + 1/6 - 1/8 + 1/10 - 1/12 + \dots = 1/2 (1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6 + 1/7 - 1/8 + \dots) = 1/2 s$

Alors $s = 1/2 s$, donc $s = 0$, ce qui contredit le fait qu'en regroupant les termes deux par deux, dans l'ordre, la somme $(1 - 1/2) + (1/3 - 1/4) + \dots$ est une somme de nombres strictement positifs, donc strictement positive. La somme infinie s , si l'on accepte d'en permuter les termes et de les regrouper, est à la fois nulle et strictement positive ! Pour éviter cette contradiction, il faut renoncer à changer l'ordre des termes des séries infinies, même si elles sont convergentes. Quelques précautions de ce genre et l'élaboration du concept de limite éliminent toutes les contradictions des méthodes de calcul introduites par Newton et par Leibniz.

La théorie des ensembles a su se prémunir des antinomies (noms donnés alors aux contradictions qu'on y a trouvées) et elle constitue aujourd'hui un socle pour toutes les mathématiques,

dont elle a unifié et simplifié la présentation. Dans son cas, plusieurs remèdes différents ont été proposés. L'axiomatisation de Zermelo-Fraenkel est la plus souvent adoptée : elle se fonde sur l'idée que n'importe quel regroupement d'objets ne doit pas être considéré comme un ensemble et qu'en particulier les regroupements trop gros (comme celui de tous les ensembles) sont à éviter. Même si la solution retenue aujourd'hui apparaît *ad hoc* à certains logiciens, elle fonctionne parfaitement, et, depuis plus de 70 ans, aucune nouvelle antinomie n'a été découverte.

Le calcul des distributions, inventé par Laurent Schwartz dans les années 1950, a justifié *a posteriori* les fantaisies des physiciens. Il se fonde sur une généralisation de la notion de fonction continue, qu'on appelle distribution ; dans un cadre nettoyé de toute contradiction, ce qui est devenu la «distribution d'Heaviside»

a pu s'épanouir. Dans cette théorie, même les distributions correspondant à des fonctions non continues sont dérivables (et on peut même y dériver les fonctions $1,5$ fois ou π fois!).

Notons que d'autres méthodes de calcul utilisées en physique (par exemple les techniques dites de renormalisation qui consistent à faire des manipulations étranges avec des quantités infinies) n'ont pas aujourd'hui de justifications mathématiques totalement satisfaisantes (autrement dit, sont contradictoires dans les cadres actuels où l'on pourrait les faire tenir) et attendent leur sauveur.

Confrontés à une contradiction, les mathématiciens réussissent toujours à l'éliminer, et une contradiction n'a jamais durablement mis en danger les mathématiques. Mieux, en stimulant la recherche, toute contradiction amène un enrichissement. La situation en mathématiques serait donc semblable à celle

1. *Ex-falso quodlibet* : une contradiction implique que tout est vrai

Le *ex-falso quodlibet* est un principe qui indique qu'une contradiction permet de tout démontrer. Il lui correspond la formule logique : $(A \text{ et non } A) \rightarrow B$. Ce principe est choquant : aussi allons-nous le démontrer de deux façons :

1. Démonstration de *ex-falso quodlibet* en utilisant le raisonnement par l'absurde.

Ce raisonnement par l'absurde fonctionne selon le schéma suivant :

Pour démontrer B (que B est vrai), je suppose que B est faux (non B) et je m'arrange pour en tirer une contradiction ; dès que j'ai réussi, j'en déduis que l'hypothèse – B est faux – est responsable de cette contradiction, et donc que B est vrai.

Admettons le raisonnement par l'absurde et prouvons le *ex-falso quodlibet*.

Je suppose que $(A \text{ et non } A)$ et je veux obtenir B. Pour cela, je suppose que B est faux. Je m'arrange pour en tirer une contradiction. C'est facile, puisque je l'ai déjà avec $(A \text{ et non } A)$. Donc B est vrai.

Ce court raisonnement est aussi utile qu'étonnant : il fait passer du raisonnement par l'absurde, facile à accepter, au *ex-falso quodlibet*, difficile à admettre.

2. Déduisons maintenant le principe du *ex-falso quodlibet* par une autre méthode.

Nous acceptons les cinq principes de raisonnement suivants :

(1) Principe de la contraposition : $(C \rightarrow D)$ équivaut à $(\text{non } D \rightarrow \text{non } C)$

(2) La loi de De Morgan : $\text{non } (E \text{ ou } F)$ équivaut à $(\text{non } E \text{ et non } F)$

(3) Tiers exclu : $\text{non } A \text{ ou } A$

(4) Principe de double négation : $(\text{non non } A)$ équivaut à A

(5) si A est vrai, alors A est toujours vrai lorsqu'on suppose B :

de A, on peut déduire $B \rightarrow A$

Partons du tiers exclu :

$\text{non } A \text{ ou } A$

Du principe (5), on déduit que :

$\text{non } B \rightarrow (\text{non } A \text{ ou } A)$

Par contraposition, on en tire :

$\text{non } (\text{non } A \text{ ou } A)$

$\rightarrow \text{non non } B$

Par utilisation de la loi de

De Morgan et simplification

de $(\text{non non } A)$ en A et de $(\text{non non } B)$ en B, on a

alors : $(A \text{ et non } A) \rightarrow B$.



Bibliothèque municipale de Cambrai