

de limite, puis plus récemment, au xx^e siècle, grâce à l'analyse non standard qui définit une manipulation non contradictoire des infinis petits. Cela a donné raison à ceux qui avaient eu le génie de prendre quelques risques et tort à l'évêque Berkeley qui voulait tout rejeter.

Pour remédier aux contradictions des nouvelles méthodes d'analyse, les mathématiciens utilisent les quantités avec lesquelles ils veulent calculer (infiniment petits, sommes et produits infinis), mais sans suivre certaines règles de manipulation de l'algèbre qu'on croyait intangibles et consubstantielles. Par exemple, selon la façon de placer les parenthèses, la somme :

$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$
vaut 0 ou 1 :

$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots = 0$

$1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots = 1 + 0 + 0 + 0 + \dots = 1$

Pour éviter cette contradiction, il faut d'abord admettre que toute somme infinie ne désigne pas un nombre : ici, la somme infinie n'a pas de sens. Les manipulations effectuées ne signifient rien, et la contradiction obtenue n'a pas à être acceptée.

Même lorsque les sommes infinies ont un sens, les opérations qu'on faisait sur les sommes finies ne sont plus nécessairement autorisées. C'est ce que montre la somme infinie suivante :

$s = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6 + 1/7 - 1/8 + 1/9 - 1/10 + 1/11 \dots$

En changeant l'ordre des termes et en les regroupant, on obtient :

$s = (1 - 1/2) - 1/4 + (1/3 - 1/6) - 1/8 + (1/5 - 1/10) - 1/12 + \dots$
 $= 1/2 - 1/4 + 1/6 - 1/8 + 1/10 - 1/12 + \dots = 1/2 (1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6 + 1/7 - 1/8 + \dots) = 1/2 s$

Alors $s = 1/2 s$, donc $s = 0$, ce qui contredit le fait qu'en regroupant les termes deux par deux, dans l'ordre, la somme $(1 - 1/2) + (1/3 - 1/4) + \dots$ est une somme de nombres strictement positifs, donc strictement positive. La somme infinie s , si l'on accepte d'en permuter les termes et de les regrouper, est à la fois nulle et strictement positive ! Pour éviter cette contradiction, il faut renoncer à changer l'ordre des termes des séries infinies, même si elles sont convergentes. Quelques précautions de ce genre et l'élaboration du concept de limite éliminent toutes les contradictions des méthodes de calcul introduites par Newton et par Leibniz.

La théorie des ensembles a su se prémunir des antinomies (noms donnés alors aux contradictions qu'on y a trouvées) et elle constitue aujourd'hui un socle pour toutes les mathématiques,

dont elle a unifié et simplifié la présentation. Dans son cas, plusieurs remèdes différents ont été proposés. L'axiomatisation de Zermelo-Fraenkel est la plus souvent adoptée : elle se fonde sur l'idée que n'importe quel regroupement d'objets ne doit pas être considéré comme un ensemble et qu'en particulier les regroupements trop gros (comme celui de tous les ensembles) sont à éviter. Même si la solution retenue aujourd'hui apparaît *ad hoc* à certains logiciens, elle fonctionne parfaitement, et, depuis plus de 70 ans, aucune nouvelle antinomie n'a été découverte.

Le calcul des distributions, inventé par Laurent Schwartz dans les années 1950, a justifié *a posteriori* les fantaisies des physiciens. Il se fonde sur une généralisation de la notion de fonction continue, qu'on appelle distribution ; dans un cadre nettoyé de toute contradiction, ce qui est devenu la «distribution d'Heaviside»

a pu s'épanouir. Dans cette théorie, même les distributions correspondant à des fonctions non continues sont dérivables (et on peut même y dériver les fonctions 1,5 fois ou π fois!).

Notons que d'autres méthodes de calcul utilisées en physique (par exemple les techniques dites de renormalisation qui consistent à faire des manipulations étranges avec des quantités infinies) n'ont pas aujourd'hui de justifications mathématiques totalement satisfaisantes (autrement dit, sont contradictoires dans les cadres actuels où l'on pourrait les faire tenir) et attendent leur sauveur.

Confrontés à une contradiction, les mathématiciens réussissent toujours à l'éliminer, et une contradiction n'a jamais durablement mis en danger les mathématiques. Mieux, en stimulant la recherche, toute contradiction amène un enrichissement. La situation en mathématiques serait donc semblable à celle

1. *Ex-falso quodlibet* : une contradiction implique que tout est vrai

Le *ex-falso quodlibet* est un principe qui indique qu'une contradiction permet de tout démontrer. Il lui correspond la formule logique : $(A \text{ et non } A) \rightarrow B$. Ce principe est choquant : aussi allons-nous le démontrer de deux façons :

1. Démonstration de *ex-falso quodlibet* en utilisant le raisonnement par l'absurde.

Ce raisonnement par l'absurde fonctionne selon le schéma suivant :

Pour démontrer B (que B est vrai), je suppose que B est faux (non B) et je m'arrange pour en tirer une contradiction ; dès que j'ai réussi, j'en déduis que l'hypothèse – B est faux – est responsable de cette contradiction, et donc que B est vrai.

Admettons le raisonnement par l'absurde et prouvons le *ex-falso quodlibet*.

Je suppose que $(A \text{ et non } A)$ et je veux obtenir B. Pour cela, je suppose que B est faux. Je m'arrange pour en tirer une contradiction. C'est facile, puisque je l'ai déjà avec $(A \text{ et non } A)$. Donc B est vrai.

Ce court raisonnement est aussi utile qu'étonnant : il fait passer du raisonnement par l'absurde, facile à accepter, au *ex-falso quodlibet*, difficile à admettre.

2. Déduisons maintenant le principe du *ex-falso quodlibet* par une autre méthode.

Nous acceptons les cinq principes de raisonnement suivants :

(1) Principe de la contraposition : $(C \rightarrow D)$ équivaut à $(\text{non } D \rightarrow \text{non } C)$

(2) La loi de De Morgan : $\text{non } (E \text{ ou } F)$ équivaut à $(\text{non } E \text{ et non } F)$

(3) Tiers exclu : $\text{non } A \text{ ou } A$

(4) Principe de double négation : $(\text{non non } A)$ équivaut à A

(5) si A est vrai, alors A est toujours vrai lorsqu'on suppose B :

de A, on peut déduire $B \rightarrow A$

Partons du tiers exclu :

$\text{non } A \text{ ou } A$

Du principe (5), on déduit que :

$\text{non } B \rightarrow (\text{non } A \text{ ou } A)$

Par contraposition, on en tire :

$\text{non } (\text{non } A \text{ ou } A)$

$\rightarrow \text{non non } B$

Par utilisation de la loi de

De Morgan et simplification

de $(\text{non non } A)$ en A et de $(\text{non non } B)$ en B, on a

alors : $(A \text{ et non } A) \rightarrow B$.



Bibliothèque municipale de Cambrai

2. Le fantôme des chers disparus

Le philosophe Berkeley (1685 -1753) a critiqué la théorie des infiniment petits, qui permet par exemple de calculer la vitesse instantanée d'un corps. Dans le cas de la chute d'une pierre, supposons que la position de la pierre soit donnée par $s = 4t^2$ (où t est le nombre de secondes depuis qu'on a lâché la pierre et s est la distance parcourue par la pierre). Quelle est la vitesse de la pierre au bout d'une seconde ?

Pour connaître la vitesse de la pierre après une seconde ($t = 1$), Leibniz propose de noter dt l'accroissement infinitésimal de temps entre 1 et $1 + dt$, et ds l'accroissement infinitésimal de distance correspondant. Il s'ensuit alors que : $ds/dt = [4(1 + dt)^2 - 4] / dt = 8 + 4dt$.

Si nous négligeons $4dt$, nous trouvons que la vitesse est 8. C'est ce que propose Leibniz. George Berkeley n'est pas d'accord. Dans *L'analyste*, paru en 1734, il refuse ce point de vue au nom de la logique, c'est-à-dire au nom de la non-contradiction. Pour lui, il est absurde de considérer 8 identique à $8 + 4dt$: «Lorsque l'on néglige un terme, aussi petit soit-il, nous ne pouvons plus dire que nous avons la valeur exacte. [...] Si dt n'est pas nul, alors l'accroissement est $8 + 4dt$, et n'est

pas 8. Si dt est nul, alors l'accroissement de distance ds est nul aussi, et la fraction ds/dt n'est pas $8 + 4dt$, mais $0/0$, qui n'a pas de sens. [...] Que sont les fluxions ? Les vitesses d'accroissements infiniment petits. Et que sont ces accroissements infiniment petits eux-mêmes ? Ce ne sont ni des quantités

finies, ni des quantités infiniment petites, pas même rien. Ce sont les fantômes de quantités disparues !»



En clair, si nous supposons que dt n'est pas nul et que $8 = 8 + 4dt$, alors $4dt = 0$ et donc $dt = 0$: contradiction ! Si dt est nul, alors on ne peut pas considérer le rapport $[4(1 + dt)^2 - 4] / dt$ (car on ne peut pas diviser par zéro et donc la vitesse n'est pas 8). Les règles de manipulation proposées par le calcul des fluxions sont contradictoires : dt est à la fois nul et non nul selon les différents moments du calcul. Nous savons que, derrière ce manque de rigueur apparent, se cache une intuition profonde et juste. La notion de limite de Cauchy allait tout arranger quelques dizaines d'années plus tard. Ainsi, la contradiction $0 = 1$ (qu'on déduit de $8 = 8 + 4dt$ avec $dt \neq 0$) ne contaminait pas tout. La contradiction n'est pas toujours grave.

de la physique, où toute expérience venant contredire les théories admises stimule les imaginations et amène une reformulation complète des vieilles théories et une avancée générale.

LA PLACIDITÉ DU MATHÉMATICIEN

Aussi, bien qu'il ne soit jamais envisageable de laisser sans traitement une contradiction, sa découverte devrait nous réjouir, car c'est l'indice que nous allons devoir la maîtriser et que cela nous enrichira. Nicolas Bourbaki a exprimé cette placidité du mathématicien : «Nous croyons que la mathématique est destinée à survivre et qu'on ne verra jamais les parties essentielles de ce majestueux édifice s'écrouler du fait d'une contradiction soudain manifestée. [...] Voilà 25 siècles que les mathématiciens ont l'habitude de corriger leurs erreurs et d'en voir leur science enrichie, non appauvrie ; cela leur donne le droit d'envisager l'avenir avec sérénité.»

Hélas, il n'existe pas de méthode toute prête permettant d'éliminer à coup sûr les contradictions. Interdire juste le raisonnement qui conduit à la contradiction n'est pas possible : dans une théorie, lorsqu'un raisonnement permet de trouver une contradiction, il y en a de nombreux autres. Les réparations à faire demandent à

chaque fois de l'imagination, voire de la subtilité ou même du génie. On peut donc légitimement ne pas partager l'optimisme de Bourbaki : ce n'est pas parce qu'on a échappé dix fois à la mort qu'on y échappera toujours.

RASSURER LES INQUIETS ?

Est-on sûr donc qu'on saura se débarrasser de toute contradiction dans l'avenir ? Est-on seulement certain que les théories résultant des réparations antérieures sont exemptes de contradictions ?

Il s'en faut. Le logicien Edward Nelson pense que, parmi d'autres théories, l'arithmétique – la théorie permettant de traiter des nombres entiers et de leurs propriétés – est contradictoire. Ce serait vraiment très ennuyeux, car l'arithmétique est le noyau central des mathématiques et il ne resterait plus rien d'intéressant en mathématiques sans l'arithmétique.

Comment rassurer les inquiets ? Pour régler l'affaire, ne peut-on pas prouver (évidemment par des moyens élémentaires) que les méthodes de raisonnement que nous utilisons ne conduiront jamais à des contradictions ? Et si l'on ne réussit pas à traiter d'un coup toutes les mathématiques, ne peut-on pas au moins fournir des garanties pour certaines théories ? Comme celles-ci s'organisent en un schéma hiérarchique où, progres-

sivement, on s'élève des théories les moins puissantes (l'arithmétique) à d'autres plus puissantes (comme l'analyse), jusqu'à la théorie des ensembles, ne peut-on pas au moins garantir les premiers échelons de la hiérarchie ?

C'est l'idée du programme proposé par le grand mathématicien allemand David Hilbert dans les années 1920. Ce programme, comme le notait récemment le mathématicien Daniel Vellman, est toujours d'actualité : la démonstration du théorème de Fermat, proposée il y a trois ans par Andrew Wiles, bien que ne concernant que les entiers, utilise la théorie des ensembles, c'est-à-dire une théorie bien plus risquée que la simple arithmétique. La démonstration de A. Wiles ne signifie vraiment qu'on ne trouvera jamais de $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ et $a > 2$ tels que $x^a + y^a = z^a$ (ce qui est une affirmation très concrète) que si la théorie des ensembles est non contradictoire, ce que proposait entre autres choses d'établir le programme de Hilbert. Cette actualité renouvelée du programme de Hilbert nous remémore les deux résultats importants auxquels il a conduit.

Le premier est la preuve par Kurt Gödel en 1931 que, dès qu'un domaine mathématique est assez large (précisément dès qu'il inclut l'arithmétique), alors la démonstration de sa non-contradiction ne peut se faire qu'à l'aide de systèmes plus puissants que lui. C'est ce