

2. Le fantôme des chers disparus

Le philosophe Berkeley (1685 -1753) a critiqué la théorie des infiniment petits, qui permet par exemple de calculer la vitesse instantanée d'un corps. Dans le cas de la chute d'une pierre, supposons que la position de la pierre soit donnée par $s = 4t^2$ (où t est le nombre de secondes depuis qu'on a lâché la pierre et s est la distance parcourue par la pierre). Quelle est la vitesse de la pierre au bout d'une seconde ?

Pour connaître la vitesse de la pierre après une seconde ($t = 1$), Leibniz propose de noter dt l'accroissement infinitésimal de temps entre 1 et $1 + dt$, et ds l'accroissement infinitésimal de distance correspondant. Il s'ensuit alors que : $ds/dt = [4(1 + dt)^2 - 4] / dt = 8 + 4dt$. Si nous négligeons $4dt$, nous trouvons que la vitesse est 8. C'est ce que propose Leibniz. George Berkeley n'est pas d'accord. Dans *L'analyste*, paru en 1734, il refuse ce point de vue au nom de la logique, c'est-à-dire au nom de la non-contradiction. Pour lui, il est absurde de considérer 8 identique à $8 + 4dt$: «Lorsque l'on néglige un terme, aussi petit soit-il, nous ne pouvons plus dire que nous avons la valeur exacte. [...] Si dt n'est pas nul, alors l'accroissement est $8 + 4dt$, et n'est

pas 8. Si dt est nul, alors l'accroissement de distance ds est nul aussi, et la fraction ds/dt n'est pas $8 + 4dt$, mais $0/0$, qui n'a pas de sens. [...] Que sont les fluxions ? Les vitesses d'accroissements infiniment petits. Et que sont ces accroissements infiniment petits eux-mêmes ? Ce ne sont ni des quantités finies, ni des quantités infiniment petites, pas même rien. Ce sont les fantômes de quantités disparues !»



En clair, si nous supposons que dt n'est pas nul et que $8 = 8 + 4dt$, alors $4dt = 0$ et donc $dt = 0$: contradiction ! Si dt est nul, alors on ne peut pas considérer le rapport $[4(1 + dt)^2 - 4] / dt$ (car on ne peut pas diviser par zéro et donc la vitesse n'est pas 8). Les règles de manipulation proposées par le calcul des fluxions sont contradictoires : dt est à la fois nul et non nul selon les différents moments du calcul. Nous savons que, derrière ce manque de rigueur apparent, se cache une intuition profonde et juste. La notion de limite de Cauchy allait tout arranger quelques dizaines d'années plus tard. Ainsi, la contradiction $0 = 1$ (qu'on déduit de $8 = 8 + 4dt$ avec $dt \neq 0$) ne contaminait pas tout. La contradiction n'est pas toujours grave.

de la physique, où toute expérience venant contredire les théories admises stimule les imaginations et amène une reformulation complète des vieilles théories et une avancée générale.

LA PLACIDITÉ DU MATHÉMATICIEN

Aussi, bien qu'il ne soit jamais envisageable de laisser sans traitement une contradiction, sa découverte devrait nous réjouir, car c'est l'indice que nous allons devoir la maîtriser et que cela nous enrichira. Nicolas Bourbaki a exprimé cette placidité du mathématicien : «Nous croyons que la mathématique est destinée à survivre et qu'on ne verra jamais les parties essentielles de ce majestueux édifice s'écrouler du fait d'une contradiction soudain manifestée. [...] Voilà 25 siècles que les mathématiciens ont l'habitude de corriger leurs erreurs et d'en voir leur science enrichie, non appauvrie ; cela leur donne le droit d'envisager l'avenir avec sérénité.»

Hélas, il n'existe pas de méthode toute prête permettant d'éliminer à coup sûr les contradictions. Interdire juste le raisonnement qui conduit à la contradiction n'est pas possible : dans une théorie, lorsqu'un raisonnement permet de trouver une contradiction, il y en a de nombreux autres. Les réparations à faire demandent à

chaque fois de l'imagination, voire de la subtilité ou même du génie. On peut donc légitimement ne pas partager l'optimisme de Bourbaki : ce n'est pas parce qu'on a échappé dix fois à la mort qu'on y échappera toujours.

RASSURER LES INQUIETS ?

Est-on sûr donc qu'on saura se débarrasser de toute contradiction dans l'avenir ? Est-on seulement certain que les théories résultant des réparations antérieures sont exemptes de contradictions ?

Il s'en faut. Le logicien Edward Nelson pense que, parmi d'autres théories, l'arithmétique – la théorie permettant de traiter des nombres entiers et de leurs propriétés – est contradictoire. Ce serait vraiment très ennuyeux, car l'arithmétique est le noyau central des mathématiques et il ne resterait plus rien d'intéressant en mathématiques sans l'arithmétique.

Comment rassurer les inquiets ? Pour régler l'affaire, ne peut-on pas prouver (évidemment par des moyens élémentaires) que les méthodes de raisonnement que nous utilisons ne conduiront jamais à des contradictions ? Et si l'on ne réussit pas à traiter d'un coup toutes les mathématiques, ne peut-on pas au moins fournir des garanties pour certaines théories ? Comme celles-ci s'organisent en un schéma hiérarchique où, progres-

sivement, on s'élève des théories les moins puissantes (l'arithmétique) à d'autres plus puissantes (comme l'analyse), jusqu'à la théorie des ensembles, ne peut-on pas au moins garantir les premiers échelons de la hiérarchie ?

C'est l'idée du programme proposé par le grand mathématicien allemand David Hilbert dans les années 1920. Ce programme, comme le notait récemment le mathématicien Daniel Vellman, est toujours d'actualité : la démonstration du théorème de Fermat, proposée il y a trois ans par Andrew Wiles, bien que ne concernant que les entiers, utilise la théorie des ensembles, c'est-à-dire une théorie bien plus risquée que la simple arithmétique. La démonstration de A. Wiles ne signifie vraiment qu'on ne trouvera jamais de $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ et $a > 2$ tels que $x^a + y^a = z^a$ (ce qui est une affirmation très concrète) que si la théorie des ensembles est non contradictoire, ce que proposait entre autres choses d'établir le programme de Hilbert. Cette actualité renouvelée du programme de Hilbert nous remémore les deux résultats importants auxquels il a conduit.

Le premier est la preuve par Kurt Gödel en 1931 que, dès qu'un domaine mathématique est assez large (précisément dès qu'il inclut l'arithmétique), alors la démonstration de sa non-contradiction ne peut se faire qu'à l'aide de systèmes plus puissants que lui. C'est ce