

2. Le fantôme des chers disparus

Le philosophe Berkeley (1685 -1753) a critiqué la théorie des infiniment petits, qui permet par exemple de calculer la vitesse instantanée d'un corps. Dans le cas de la chute d'une pierre, supposons que la position de la pierre soit donnée par $s = 4t^2$ (où t est le nombre de secondes depuis qu'on a lâché la pierre et s est la distance parcourue par la pierre). Quelle est la vitesse de la pierre au bout d'une seconde ?

Pour connaître la vitesse de la pierre après une seconde ($t = 1$), Leibniz propose de noter dt l'accroissement infinitésimal de temps entre 1 et $1 + dt$, et ds l'accroissement infinitésimal de distance correspondant. Il s'ensuit alors que : $ds/dt = [4(1 + dt)^2 - 4] / dt = 8 + 4dt$.

Si nous négligeons $4dt$, nous trouvons que la vitesse est 8. C'est ce que propose Leibniz. George Berkeley n'est pas d'accord. Dans *L'analyste*, paru en 1734, il refuse ce point de vue au nom de la logique, c'est-à-dire au nom de la non-contradiction. Pour lui, il est absurde de considérer 8 identique à $8 + 4dt$: «Lorsque l'on néglige un terme, aussi petit soit-il, nous ne pouvons plus dire que nous avons la valeur exacte. [...] Si dt n'est pas nul, alors l'accroissement est $8 + 4dt$, et n'est

pas 8. Si dt est nul, alors l'accroissement de distance ds est nul aussi, et la fraction ds/dt n'est pas $8 + 4dt$, mais $0/0$, qui n'a pas de sens. [...] Que sont les fluxions ? Les vitesses d'accroissements infiniment petits. Et que sont ces accroissements infiniment petits eux-mêmes ? Ce ne sont ni des quantités

finies, ni des quantités infiniment petites, pas même rien. Ce sont les fantômes de quantités disparues !»



En clair, si nous supposons que dt n'est pas nul et que $8 = 8 + 4dt$, alors $4dt = 0$ et donc $dt = 0$: contradiction ! Si dt est nul, alors on ne peut pas considérer le rapport $[4(1 + dt)^2 - 4] / dt$ (car on ne peut pas diviser par zéro et donc la vitesse n'est pas 8). Les règles de manipulation proposées par le calcul des fluxions sont contradictoires : dt est à la fois nul et non nul selon les différents moments du calcul. Nous savons que, derrière ce manque de rigueur apparent, se cache une intuition profonde et juste. La notion de limite de Cauchy allait tout arranger quelques dizaines d'années plus tard. Ainsi, la contradiction $0 = 1$ (qu'on déduit de $8 = 8 + 4dt$ avec $dt \neq 0$) ne contaminait pas tout. La contradiction n'est pas toujours grave.

de la physique, où toute expérience venant contredire les théories admises stimule les imaginations et amène une reformulation complète des vieilles théories et une avancée générale.

LA PLACIDITÉ DU MATHÉMATICIEN

Aussi, bien qu'il ne soit jamais envisageable de laisser sans traitement une contradiction, sa découverte devrait nous réjouir, car c'est l'indice que nous allons devoir la maîtriser et que cela nous enrichira. Nicolas Bourbaki a exprimé cette placidité du mathématicien : «Nous croyons que la mathématique est destinée à survivre et qu'on ne verra jamais les parties essentielles de ce majestueux édifice s'écrouler du fait d'une contradiction soudain manifestée. [...] Voilà 25 siècles que les mathématiciens ont l'habitude de corriger leurs erreurs et d'en voir leur science enrichie, non appauvrie ; cela leur donne le droit d'envisager l'avenir avec sérénité.»

Hélas, il n'existe pas de méthode toute prête permettant d'éliminer à coup sûr les contradictions. Interdire juste le raisonnement qui conduit à la contradiction n'est pas possible : dans une théorie, lorsqu'un raisonnement permet de trouver une contradiction, il y en a de nombreux autres. Les réparations à faire demandent à

chaque fois de l'imagination, voire de la subtilité ou même du génie. On peut donc légitimement ne pas partager l'optimisme de Bourbaki : ce n'est pas parce qu'on a échappé dix fois à la mort qu'on y échappera toujours.

RASSURER LES INQUIETS ?

Est-on sûr donc qu'on saura se débarrasser de toute contradiction dans l'avenir ? Est-on seulement certain que les théories résultant des réparations antérieures sont exemptes de contradictions ?

Il s'en faut. Le logicien Edward Nelson pense que, parmi d'autres théories, l'arithmétique – la théorie permettant de traiter des nombres entiers et de leurs propriétés – est contradictoire. Ce serait vraiment très ennuyeux, car l'arithmétique est le noyau central des mathématiques et il ne resterait plus rien d'intéressant en mathématiques sans l'arithmétique.

Comment rassurer les inquiets ? Pour régler l'affaire, ne peut-on pas prouver (évidemment par des moyens élémentaires) que les méthodes de raisonnement que nous utilisons ne conduiront jamais à des contradictions ? Et si l'on ne réussit pas à traiter d'un coup toutes les mathématiques, ne peut-on pas au moins fournir des garanties pour certaines théories ? Comme celles-ci s'organisent en un schéma hiérarchique où, progres-

sivement, on s'élève des théories les moins puissantes (l'arithmétique) à d'autres plus puissantes (comme l'analyse), jusqu'à la théorie des ensembles, ne peut-on pas au moins garantir les premiers échelons de la hiérarchie ?

C'est l'idée du programme proposé par le grand mathématicien allemand David Hilbert dans les années 1920. Ce programme, comme le notait récemment le mathématicien Daniel Vellman, est toujours d'actualité : la démonstration du théorème de Fermat, proposée il y a trois ans par Andrew Wiles, bien que ne concernant que les entiers, utilise la théorie des ensembles, c'est-à-dire une théorie bien plus risquée que la simple arithmétique. La démonstration de A. Wiles ne signifie vraiment qu'on ne trouvera jamais de $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ et $a > 2$ tels que $x^a + y^a = z^a$ (ce qui est une affirmation très concrète) que si la théorie des ensembles est non contradictoire, ce que proposait entre autres choses d'établir le programme de Hilbert. Cette actualité renouvelée du programme de Hilbert nous remémore les deux résultats importants auxquels il a conduit.

Le premier est la preuve par Kurt Gödel en 1931 que, dès qu'un domaine mathématique est assez large (précisément dès qu'il inclut l'arithmétique), alors la démonstration de sa non-contradiction ne peut se faire qu'à l'aide de systèmes plus puissants que lui. C'est ce

qu'on appelle le second théorème d'incomplétude, et il signifie qu'aucune démonstration vraiment satisfaisante de non-contradiction ne sera donc jamais donnée.

L'autre résultat – plus positif – du programme de Hilbert est le développement d'un domaine de la logique mathématique, appelée théorie de la preuve, où l'on établit des énoncés de non-contradiction relative, c'est-à-dire du genre : «Si la théorie X est non contradictoire, alors la théorie Y l'est aussi.» Un exemple de 1938 concerne l'axiome du choix (qui dit qu'associé à tout ensemble X d'ensembles non vides, il y a au moins un nouvel ensemble F comportant un élément exactement de chaque ensemble de X) : si la théorie des ensembles sans l'axiome du choix est non contradictoire, alors la théorie avec l'axiome du choix est aussi non contradictoire.

Bien d'autres énoncés de non-contradiction relative ont été donnés, en particulier que, si la théorie des ensembles est non contradictoire, alors l'analyse aussi, de même que la géométrie et l'arithmétique. Ainsi, dans la hiérarchie des théories, plus on s'élève, plus on prend le risque d'obtenir des contradictions. La confiance en l'arithmétique est quasi absolue (sauf peut-être pour E. Nelson). À l'autre extrême, la théorie des ensembles est nettement moins sûre. Insistons là-dessus : même si l'on pense que le risque de contradiction dans la théorie des ensembles est sérieux, cela ne signifie pas qu'on doit l'abandonner : si une contradiction se manifeste, on saura sans doute la contourner.

L'INCERTAIN, ET LES ARGUMENTS DE LUCAS

Acceptons l'idée que les mathématiciens vivent dans l'incertain et le provisoire. Plusieurs fois dans le passé, des théories qui semblaient assurées se sont révélées contradictoires. Peut-être aurons-nous à ajuster nos théories et à les réparer, mais tel est le cours normal des choses.

Cette incertitude sans gravité ne semble pas avoir été comprise par ceux qui utilisent les théorèmes d'incomplétude de Gödel pour démontrer que l'esprit humain est supérieur à celui de toute machine possible et donc que les recherches en intelligence artificielle sont d'avance condamnées à l'échec. Le raisonnement qu'ils avancent avait été proposé, il y a déjà plus de 30 ans, par le philosophe américain J. Lucas. Il est périodiquement remis à la mode, notamment et à deux reprises (*perseverare diabolicum*), par Roger Penrose.

«Une machine, disent nos philosophes, peut être identifiée à une théo-

rie mathématique, car, comme elle, elle est définie par un nombre fini de règles mécaniques fixées une fois pour toutes. D'après le second théorème d'incomplétude de Gödel, une machine ne peut pas savoir d'elle-même qu'elle est non contradictoire.» Jusque-là, ça va. «Nous, à l'inverse, grâce à la compréhension que nous avons de ce que représentent les symboles de nos théories, grâce à notre intuition des objets mathématiques, et parce que nous pouvons nous élever dans la hiérarchie des théories, nous réussissons à savoir avec certitude que certaines théories ne sont pas contradictoires, et que nous ne nous contredisons pas. Nous ne sommes pas équivalents à des machines et aucune ne nous égalera jamais.»

Cet argumentaire oublie simplement que nous avons parfois de mauvaises intuitions. Même si Frege associait des réalités aux symboles de la théorie des ensembles qu'il proposait et donc était certain de sa non-contradiction (au point d'écrire un livre pour la présenter), il se trompait, et sa théorie était contradictoire. Bien souvent, des théories ont été proposées par des gens certains de la cohérence de leurs idées et pourtant se sont écroulées et ont dû être réparées. Pour les théories les plus élevées de la hiérarchie mathématique, on n'a vraiment aucune raison sérieuse (autre que leur utilisation pendant une plus ou moins

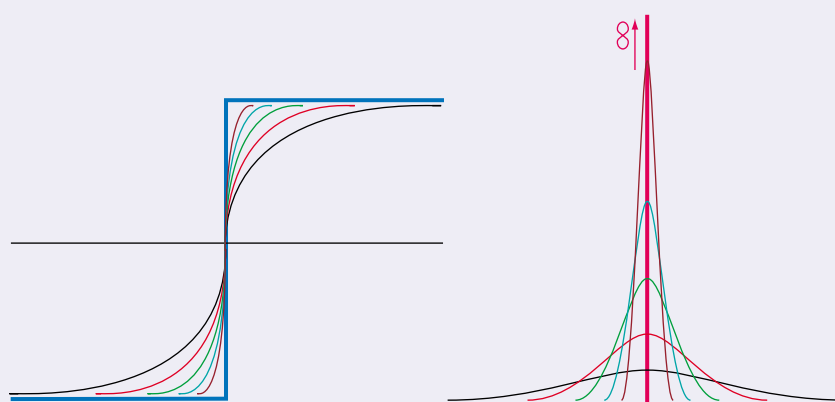
longue période) de croire qu'elles sont non contradictoires. Quant à jurer, quand il s'agit de nous-mêmes, que nous ne nous contredirons jamais, c'est renoncer à toute discussion de problèmes politiques et sociaux entre amis!

L'histoire des mathématiques et les théorèmes de Gödel montrent que nous ne pourrions jamais être certains de la non-contradiction des théories que nous utilisons. Que nous soyons des machines ou pas ne change rien : les théories mathématiques comme les théories physiques ne proposent pas des certitudes, mais sont des instruments qui fonctionnent plus ou moins bien, plus ou moins longtemps et qu'il faut ajuster ou changer de temps en temps. Peut-être réussira-t-on un jour à démontrer que nous ne sommes pas des machines, mais cela ne se fera pas par l'invocation des théorèmes d'incomplétude de Gödel!

VIVRE AVEC LES CONTRADICTIONS

C'est sans doute à cause de l'improvvisabilité de la non-contradiction que des tentatives ont été menées récemment pour l'accepter franchement. L'idée est de modifier la logique classique pour éviter la contagion généralisée des contradictions, autrement dit empêcher l'effet du *ex-falso quodlibet*. Après tout, lorsque nous nous contredisons, nous ne nous mettons

3. Échelon d'Heaviside et impulsion de Dirac



Heaviside examinait la limite des courbes continues ayant la forme d'un S, limite discontinue valant -1 pour x négatif et $+1$ pour x positif. La limite de la dérivée de cette courbe, l'échelon d'Heaviside, est l'impulsion de Dirac, valant 0 partout sauf à l'origine, où la dérivée limite est infinie.

Considéré comme une fonction, l'échelon d'Heaviside ne possède pas de dérivée en 0. Du point de vue du mathématicien, la dérivation n'avait pas de sens et conduisait à une contradiction, si on la prenait au sérieux.

Dans le cadre de la théorie des distributions de Laurent Schwartz, la distribution d'Heaviside est dérivable et admet une dérivée qui est la distribution de Dirac (ce n'est pas une fonction). Les calculs menés par les physiciens ont maintenant trouvé un cadre non contradictoire. Mais d'autres pratiques des physiciens sentent le soufre.