

qu'on appelle le second théorème d'incomplétude, et il signifie qu'aucune démonstration vraiment satisfaisante de non-contradiction ne sera donc jamais donnée.

L'autre résultat – plus positif – du programme de Hilbert est le développement d'un domaine de la logique mathématique, appelée théorie de la preuve, où l'on établit des énoncés de non-contradiction relative, c'est-à-dire du genre : «Si la théorie X est non contradictoire, alors la théorie Y l'est aussi.» Un exemple de 1938 concerne l'axiome du choix (qui dit qu'associé à tout ensemble X d'ensembles non vides, il y a au moins un nouvel ensemble F comportant un élément exactement de chaque ensemble de X) : si la théorie des ensembles sans l'axiome du choix est non contradictoire, alors la théorie avec l'axiome du choix est aussi non contradictoire.

Bien d'autres énoncés de non-contradiction relative ont été donnés, en particulier que, si la théorie des ensembles est non contradictoire, alors l'analyse aussi, de même que la géométrie et l'arithmétique. Ainsi, dans la hiérarchie des théories, plus on s'élève, plus on prend le risque d'obtenir des contradictions. La confiance en l'arithmétique est quasi absolue (sauf peut-être pour E. Nelson). À l'autre extrême, la théorie des ensembles est nettement moins sûre. Insistons là-dessus : même si l'on pense que le risque de contradiction dans la théorie des ensembles est sérieux, cela ne signifie pas qu'on doit l'abandonner : si une contradiction se manifeste, on saura sans doute la contourner.

L'INCERTAIN, ET LES ARGUMENTS DE LUCAS

Acceptons l'idée que les mathématiciens vivent dans l'incertain et le provisoire. Plusieurs fois dans le passé, des théories qui semblaient assurées se sont révélées contradictoires. Peut-être aurons-nous à ajuster nos théories et à les réparer, mais tel est le cours normal des choses.

Cette incertitude sans gravité ne semble pas avoir été comprise par ceux qui utilisent les théorèmes d'incomplétude de Gödel pour démontrer que l'esprit humain est supérieur à celui de toute machine possible et donc que les recherches en intelligence artificielle sont d'avance condamnées à l'échec. Le raisonnement qu'ils avancent avait été proposé, il y a déjà plus de 30 ans, par le philosophe américain J. Lucas. Il est périodiquement remis à la mode, notamment à deux reprises (*perseverare diabolium*), par Roger Penrose.

«Une machine, disent nos philosophes, peut être identifiée à une théo-

rie mathématique, car, comme elle, elle est définie par un nombre fini de règles mécaniques fixées une fois pour toutes. D'après le second théorème d'incomplétude de Gödel, une machine ne peut pas savoir d'elle-même qu'elle est non contradictoire.» Jusque-là, ça va. «Nous, à l'inverse, grâce à la compréhension que nous avons de ce que représentent les symboles de nos théories, grâce à notre intuition des objets mathématiques, et parce que nous pouvons nous élever dans la hiérarchie des théories, nous réussissons à savoir avec certitude que certaines théories ne sont pas contradictoires, et que nous ne nous contredisons pas. Nous ne sommes pas équivalents à des machines et aucune ne nous égalera jamais.»

Cet argumentaire oublie simplement que nous avons parfois de mauvaises intuitions. Même si Frege associait des réalités aux symboles de la théorie des ensembles qu'il proposait et donc était certain de sa non-contradiction (au point d'écrire un livre pour la présenter), il se trompait, et sa théorie était contradictoire. Bien souvent, des théories ont été proposées par des gens certains de la cohérence de leurs idées et pourtant se sont écroulées et ont dû être réparées. Pour les théories les plus élevées de la hiérarchie mathématique, on n'a vraiment aucune raison sérieuse (autre que leur utilisation pendant une plus ou moins

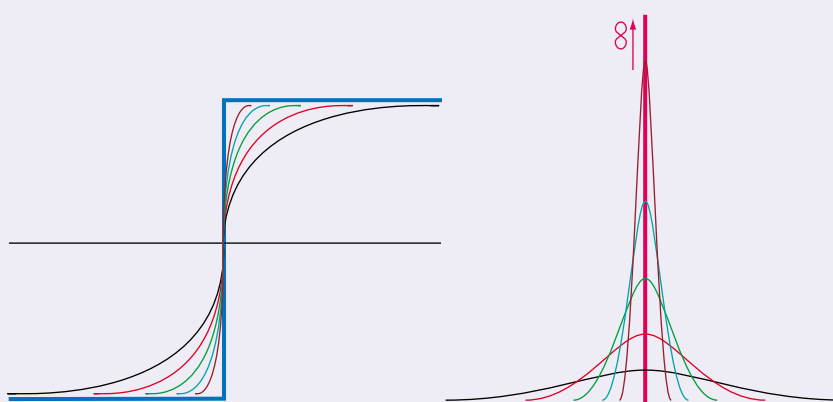
longue période) de croire qu'elles sont non contradictoires. Quant à jurer, quand il s'agit de nous-mêmes, que nous ne nous contredirons jamais, c'est renoncer à toute discussion de problèmes politiques et sociaux entre amis!

L'histoire des mathématiques et les théorèmes de Gödel montrent que nous ne pourrions jamais être certains de la non-contradiction des théories que nous utilisons. Que nous soyons des machines ou pas ne change rien : les théories mathématiques comme les théories physiques ne proposent pas des certitudes, mais sont des instruments qui fonctionnent plus ou moins bien, plus ou moins longtemps et qu'il faut ajuster ou changer de temps en temps. Peut-être réussira-t-on un jour à démontrer que nous ne sommes pas des machines, mais cela ne se fera pas par l'invocation des théorèmes d'incomplétude de Gödel!

VIVRE AVEC LES CONTRADICTIONS

C'est sans doute à cause de l'improvisabilité de la non-contradiction que des tentatives ont été menées récemment pour l'accepter franchement. L'idée est de modifier la logique classique pour éviter la contagion généralisée des contradictions, autrement dit empêcher l'effet du *ex-falso quodlibet*. Après tout, lorsque nous nous contredisons, nous ne nous mettons

3. Échelon d'Heaviside et impulsion de Dirac



Heaviside examinait la limite des courbes continues ayant la forme d'un S, limite discontinue valant -1 pour x négatif et $+1$ pour x positif. La limite de la dérivée de cette courbe, l'échelon d'Heaviside, est l'impulsion de Dirac, valant 0 partout sauf à l'origine, où la dérivée limite est infinie.

Considéré comme une fonction, l'échelon d'Heaviside ne possède pas de dérivée en 0. Du point de vue du mathématicien, la dérivation n'avait pas de sens et conduisait à une contradiction, si on la prenait au sérieux.

Dans le cadre de la théorie des distributions de Laurent Schwartz, la distribution d'Heaviside est dérivable et admet une dérivée qui est la distribution de Dirac (ce n'est pas une fonction). Les calculs menés par les physiciens ont maintenant trouvé un cadre non contradictoire. Mais d'autres pratiques des physiciens sentent le soufre.

4. Les dangers de la contradiction

Des mathématiciens soutiennent que nous percevons à l'évidence que certaines théories sont non contradictoires et qu'ainsi nous sommes supérieurs aux machines. La méthode qu'ils évoquent est dite *sémantique*. En voici le principe.

D'abord les nombres entiers sont pour nous des objets mentaux clairs dont nous avons une connaissance intuitive immédiate : « $2 + 2 = 4$ » ou «7 est un nombre premier» sont pour nous des évidences absolues. De même encore, « $x + y = y + x$ pour tout couple d'entiers».

Lorsque nous écrivons les axiomes de la théorie des nombres, chaque axiome nous apparaît comme une propriété absolument certaine des nombres. Les règles logiques qui permettent à partir des axiomes d'obtenir de nouveaux énoncés sont

aussi correctes de toute évidence (elles ont ce même caractère d'évidence absolue que « $2 + 2 = 4$ »).

Partant d'énoncés certains, et utilisant des règles certaines, de proche en proche, nous ne pourrions donc prouver que des énoncés absolument certains. Et donc jamais en arithmétique, nous ne prouverons que $0 = 1$ est faux.

Autrement dit, le fait que nous connaissions intimement les nombres et que leur existence (même si elle est abstraite) ne fait aucun doute, nous fournit une garantie en apparence totale que

le système de l'arithmétique ne conduit jamais à une contradiction.

Il n'en est pas de même pour les systèmes plus riches de l'analyse ou de la théorie des ensembles, dont les entités sont moins simples que les nombres entiers. Plus on s'élève dans la force des théories, plus on risque donc de rencontrer des contradictions qui pourraient éventuellement y être profondément cachées.

Même les preuves sémantiques de non-contradiction sont quelquefois trompeuses : Frege, par exemple, qui pensait pourtant avoir une compréhension et une perception claire des ensembles, a proposé une formalisation de sa théorie qui s'est révélée contradictoire.



Notre conviction que les théories mathématiques sont non contradictoires peut être une illusion, y compris pour l'arithmétique (dont la preuve sémantique de non-contradiction n'est rendue rigoureuse que dans une théorie plus puissante que l'arithmétique). Pas plus que les machines, nous ne pouvons nous libérer des contraintes du second théorème d'incomplétude de Gödel : on ne peut pas prouver la non-contradiction des théories mathématiques intéressantes. On ne peut donc pas tirer de ce théorème que nous sommes supérieurs aux machines. Restons modestes.

pas à délirer aussitôt à propos de tout : nous savons circonscrire les effets d'une contradiction.

Plusieurs voies semblent ouvertes et ont conduit à ce qu'on appelle les logiques paraconsistantes, où l'on décrit des règles de raisonnement n'incluant pas le *ex-falso quodlibet* et qui bien sûr ne permettent pas de le retrouver. Ces systèmes qui sont assez complexes provoquent souvent une gêne à cause de leurs propriétés non classiques. Par exemple, le système défendu par Graham Priest propose d'accepter sérieusement que des énoncés soient à la fois vrais et faux.

Ces recherches ont cependant un double intérêt. D'une part, elles conduisent à développer des programmes d'ordinateurs simulant les raisonnements humains et résistant à l'apparition de contradictions. D'autre part, elles suggèrent de reconsidérer le programme de Hilbert en le modifiant un peu. De manière à ne pas avoir à craindre un effondrement général des mathématiques, nous devrions utiliser une logique paraconsistante et nous assurer que notre nouvelle présentation (i) préserve toutes les mathématiques intéressantes (tous les résultats vrais des mathématiques doivent l'être encore, car on ne veut évi-

demment pas perdre le travail des siècles précédents), (ii) est non triviale, c'est-à-dire que tout n'y est pas simultanément vrai et faux, et (iii) laisse la place à une preuve, par des raisonnements élémentaires, des deux propriétés précédentes.

On aurait alors, comme Hilbert l'espérait, une garantie que tout ne sera pas à jeter suite à une découverte mal-

encontreuse de contradiction, et donc l'assurance d'un progrès continu et sans retour en arrière des mathématiques. Un tel programme de Hilbert modifié peut-il aboutir ? Les avis divergent aujourd'hui, mais les grandes idées, comme celles de Newton, Leibniz, Frege ou Hilbert, à défaut de fonctionner du premier coup, s'imposent à la longue.

Jean-Paul DELAHAYE est directeur adjoint du Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille du CRNS.

e-mail : delahaye@lilfl.fr



Le texte a été illustré par des peintures de René Magritte (1898-1967), le peintre de l'autocontradiction.

Sur la controverse de Berkeley à propos du calcul infinitésimal : P. DAVIS et R. Hersch, *L'univers mathématique*, Gauthier-Villars, Paris, 1982.

J.-L. GARDIES, *Le raisonnement par l'absurde*, Bibliothèque d'histoire des sciences, PUF, Paris, 1991.

R. PENROSE, *Les ombres de l'esprit. À la recherche d'une science de la conscience*, InterÉditions, 1995.

G. PRIEST, *In Contradiction : A Study of the Transconsistent*, Martinus Nijhoff Publishers, Kluwer Academic Publisher Group, Dordrecht, 1987, (Les logiques paraconsistantes et leur importance philosophique).

D. VELLMANN, *Fermat's Last Theorem and Hilbert's Program*, in *The Mathematical Intelligencer*, 19, 1, pp. 64-67, 1997.

P. BESNARD et T. SHAUB, *Circumscribing Inconsistency*, IJCAI (International Joint Conference Artificial Intelligence), 1997.

Santé

Le guide de l'homéopathie

B. Chemouny. Éditions Odile Jacob, Paris, 1997

Un gros livre (plus de 750 pages!) sur l'homéopathie, chez un éditeur réputé pour la confiance que lui ont témoignée de nombreux scientifiques éminents, quelle aubaine! Cela doit être documenté et sérieux. Eh bien, non! Au risque de déclencher une fois de plus le syndrome de Galilée («Galilée avait raison et l'on disait qu'il avait tort; on dit que j'ai tort, donc j'ai raison»), je dirai pourquoi je considère ce livre comme médiocre malgré son volume, et comme dangereuse la caution que lui donne son éditeur.

Cet ouvrage est très informatif : citant le *Petit Larousse*, il indique que l'homéopathie «consiste à soigner les malades au moyen de remèdes (à doses infinitésimales obtenues par dilution) capables, à des doses élevées, de produire sur l'homme sain des symptômes semblables à ceux de la maladie à combattre».

La bryone, navet du diable de nos campagnes, *Bryonia alba*, est un purgatif puissant et également un abortif. La bryone homéopathique doit donc être bonne contre les diarrhées et pour éviter les fausses couches. Elle est en fait recommandée (pp. 536-537) contre la constipation – mais aussi contre les toux sèches et douloureuses, la fièvre, les arthrites...

Le chlorure de sodium – ou plutôt le sel de mer, puisque ce guide stipule que le produit ne doit pas être traité – n'a guère d'effet, si ce n'est qu'on peut se faire vomir avec de l'eau très salée et tiède. Contre quoi est-il «utile», en dilutions homéopathiques? Troubles de la croissance, troubles de l'adolescence, spasmodie, dépression réactionnelle, rhumes à répétition, herpès labial, céphalées et migraines (en fait, dans chaque cas, avec les «bons répondants»...).

Et le mélange de soufre et de calcaire d'huîtres (*Hepar sulfur*, conçu par Hahnemann lui-même, s'il vous plaît)? Je suis bien prêt à en avaler quelques grammes et à prédire que je n'en tirerai que quelques rots. Pourtant, si vous en prenez assez peu (ô, la dilution de ces corps quasi insolubles!), vous serez guéris de suppurations aiguës, d'otites, de suppurations chroniques, de troubles du caractère chez l'enfant, de laryngites, des diarrhées de l'enfant...

Arrêtons-nous là, bien qu'il y ait des perles comparables dans tout le livre, mais je ne résiste pas au plaisir de vous en faire admirer une dernière. Référence est faite à R. Thom (pourquoi?) dans un encadré qui mérite d'être cité en entier : «22,4 litres contiennent le nombre d'Avogadro $[6,023 \times 10^{23}]$. Le nombre de molécules en jeu dans le corps humain tournerait ainsi autour de 10^{80} . Si l'on voulait se représenter par un diagramme la configuration du mouvement de ces molécules, il faudrait un espace de dimensions deux fois 10^{80} au moins... C'est assez énorme! Et le matérialiste convaincu, en général, fait *grosso modo* appel aux propriétés de la matière, étant donné que l'on croit les connaître, alors qu'on ne les connaît pas! On oublie trop facilement : la raison d'être des propriétés de la matière reste une énigme. Les savants n'ont pas l'habitude d'avouer leur ignorance!»

Passons sur l'estimation du nombre de molécules du corps humain, qui n'est fausse que d'un facteur d'environ 10^{50} (j'arrondis à la dizaine; «c'est assez énorme», en effet). Mais comprenez-vous de quoi il s'agit? Et, en tout cas, quelqu'un qui «n'a pas l'habitude», etc., c'est l'auteur...

Cela étant, si l'homéopathie vous fait du bien, surtout ne changez pas de traitement, malgré B. Chemouny et malgré les doses peu homéopathiques auxquelles il vous distille ses recommandations.

Guy OURISSON

Chimie

La chimie inorganique

J. Huheey, E. Keiter, R. Keiter. Éditions De Boeck, 1996.

Qu'est-ce que la chimie inorganique? Tel est l'intitulé du premier chapitre de l'ouvrage, récemment traduit en français, de J. Huheey et de E. et R. Keiter. Les quelque 1 000 pages qui suivent montrent pourquoi un seul chapitre ne suffit pas pour répondre à cette question, en nous faisant découvrir ce que la chimie inorganique a été, ce qu'elle est, ce qu'elle sera peut-être...

Car le souci des auteurs est là : faire un état des connaissances actuelles en chimie inorganique qui soit utile à l'étudiant débutant, tout en tenant en haleine les étudiants les plus avancés

et, pourquoi pas, les enseignants et les chercheurs.

Une première partie de l'ouvrage pose les fondements de la chimie inorganique et permet au lecteur novice d'acquérir les bases de la discipline. On retrouve ainsi les classiques développements concernant la structure de l'atome, la structure moléculaire ou la liaison chimique. Un chapitre de 40 pages est consacré à la symétrie, à la théorie des groupes et à ses applications. Il est habilement émaillé de nombreux petits exercices, grâce auxquels on testera pas à pas la compréhension des principes essentiels. L'utilisation courante des tables de caractères (qui regroupent les éléments de symétrie des molécules et diverses informations utiles pour la construction des diagrammes d'orbitales moléculaires, l'analyse des spectres de vibrations...) est exposée sans la mathématisation, certes indispensable dans les ouvrages spécialisés, mais déroutante pour beaucoup de lecteurs. Cette mise au point n'est pas superflue, à en juger par l'aura qui semble nimer ces tables, car, de même que Pangloss s'émerveillait de l'ordonnance du monde qui voulait que les pommiers poussassent là où l'on fait du cidre ou que le nez fût fait pour porter des lunettes, nombre d'étudiants s'étonnent naïvement de ce que permettent de prédire les tables de caractères...

Une deuxième partie aborde, de manière thématique, les différentes facettes de la chimie inorganique : de la chimie de l'état solide à la chimie de coordination, en passant par la chimie des acides et des bases. Les derniers chapitres remettent la chimie inorganique dans son contexte scientifique : les relations qu'elle entretient avec la chimie organique de synthèse et avec la chimie industrielle sont évoquées dans le chapitre consacré aux organométalliques ; les liens étroits de cette «chimie de l'inanimé» avec les systèmes biologiques sont détaillés... Une troisième partie, enfin, s'organise en annexes diverses, dont l'une fait le point sur la grammaire de la nomenclature IUPAC.

Il faut saluer le souci constant de mise en perspective historique des connaissances. Les articles originaux sont systématiquement cités, les controverses signalées, les expériences décrites. Les théories sont présentées pour ce qu'elles sont : des modèles de description de la réalité dont les limites sont dûment discutées. La généalogie des diverses théories de la liaison est ainsi précisée. Qu'une théorie ait une histoire, qu'elle soit donc contingente, est sans doute l'un des enseignements les plus utiles de l'histoire des sciences