



Les fractales et la Bourse

BENOIT MANDELBROT

Comment modéliser les fluctuations de la Bourse par une transformation géométrique très simple.

Regardons les diagrammes ci-contre. Certains sont des chroniques de changements successifs d'un prix coté en Bourse, d'autres sont des simulations réalisées à partir de modèles : l'objet des simulations est de saisir au moins une parcelle de la réalité des cours de bourse afin de l'analyser.

Une telle analyse intéresse l'économiste, qui cherche à comprendre la nature des marchés, l'assureur, qui cherche à diminuer les risques, et le spéculateur, qui cherche à mettre les risques à son service. Pour atteindre ces buts, une condition reste incontournable : il faut décrire la réalité. Or on ne connaît que ce que l'on sait imiter, ce qui explique les grands investissements de la société dans la recherche de modèles performants.

Les mots précédents ne suscitent aucune controverse, mais l'appel aux images n'est pas typique des sciences dites «dures», ni de celles qui aspirent à le devenir. L'idéal classique est de tout réduire à l'analyse mathématique et à la mesure d'un petit nombre de paramètres caractéristiques. Pour les buts de cette chronique, tout au contraire, l'œil est un instrument indispensable qui mérite qu'on lui redonne son importance, tout au moins dans les premiers stades des théories. Cette foi dans les vertus de l'apparence a prouvé sa richesse et son efficacité : l'étude des fractales a été prolongée et appliquée dans tous les domaines scientifiques. Dans le cas des bourses, la même vision suggère que, pour juger de la valeur d'un modèle, il est bon d'examiner attentivement les courbes qu'il produit.

Les images représentant (ou imitant) les prix eux-mêmes ne disent pas grand-chose, et nul ne doute que les images puissent tromper. Mais on peut de même être trompé par les mots et même par les formules statistiques lorsqu'on les applique là où elles ne sont pas appropriées.

Le hasard n'est pas unique et se présente sous trois formes distinctes au moins. Le hasard usuel, celui des tirages

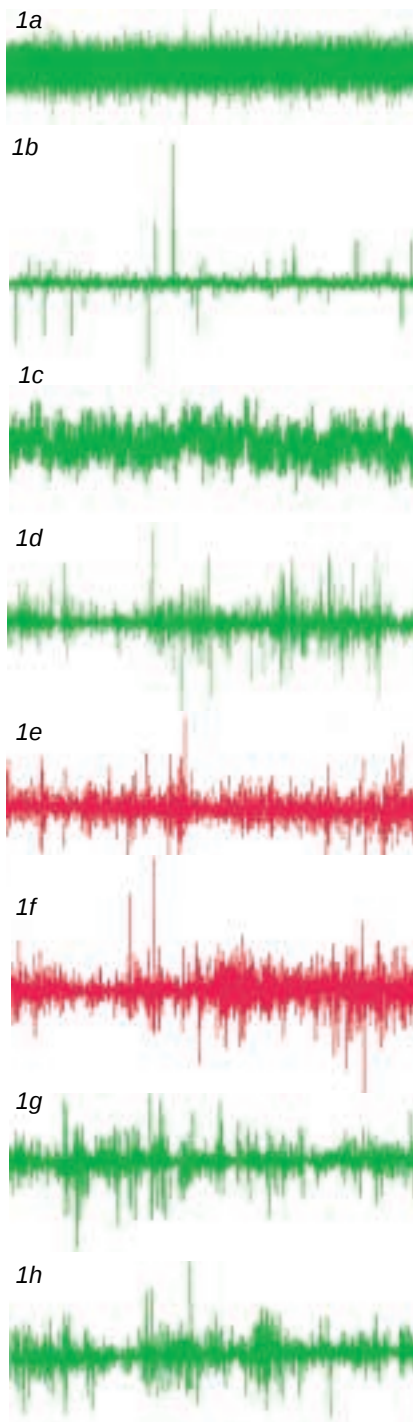
à pile ou face, est «bénin», tandis que tout suggère que la Bourse est soumise à une forme «sauvage» de hasard. La différence notable entre ces types de hasard est que nombre des outils statistiques actuels ne sont applicables qu'au hasard bénin. Donc, sans laisser le dernier mot à l'œil (ne serait-ce justement que parce qu'il ne s'exprime pas verbalement), le visuel est indispensable. Or, parmi les courbes ci-contre, l'œil distingue immédiatement des structures plus ou moins simples et d'autres qui sont incontestablement compliquées. Nous allons les examiner dans un premier temps, puis révéler leur source.

La structure la plus simple est représentée sur le diagramme 1a où les variations se maintiennent dans une bande «normale» très étroite, un serpent, et tout petit bout de cette chronique est presque pareil à tout autre petit bout. Tout cela correspondrait à une «volatilité», c'est-à-dire à une amplitude des fluctuations constante dans le temps.

Quant aux diagrammes les plus compliqués, certains représentent des données réelles, d'autres des simulations obtenues avec mon nouveau modèle, dit multifractal, que nous décrirons plus loin. Dans les unes et les autres, on identifie deux caractéristiques des cours des bourses : il est des jours noirs où un prix dégringole de façon instantanée ou presque, correspondant à un changement «hors toute norme», et une alternance (très irrégulière) de périodes de faible volatilité et d'autres qualifiées par les boursiers de «turbulentes».

Considérons maintenant les diagrammes simples. Dans 1b, il y a bien des pics, plus intenses même que dans les diagrammes les plus compliqués. Mais ces pics sont isolés, et il reste un «serpent» de volatilité plus ou moins constante comme dans le diagramme 1a. Quant au diagramme 1c, il ne présente pas de pics, mais le fond monte et descend de façon apparemment cyclique.

En conclusion provisoire, le diagramme le plus simple et les diagrammes



simples se limitent nécessairement à illustrer des modèles partiels de la réalité.

MODÈLES ET RÉALITÉ

Révétons leurs sources. Le modèle (1a) a été proposé par Louis Bachelier en 1900 ; fondé sur l'idée que les prix suivent des «promenades aléatoires», il a conduit à ce qui allait devenir le mouvement brownien. Il s'agit là du prototype même du hasard bénin, illustré par les écarts par rapport à la moyenne caractéristique d'un tirage à pile ou face. Si ce modèle avait été réaliste, la Bourse n'aurait pas été profondément plus compliquée à étudier que les gaz en équilibre.

Continuons. Le diagramme (1b) illustre un premier modèle, que je proposai en 1963, fondé sur les processus stables (ce qui allait devenir le «vol de Lévy»). Le diagramme (1c) illustre un deuxième modèle, que je proposai en 1965, fondé sur le mouvement brownien fractionnaire. Chacun de ces deux modèles incorpore une des deux formes distinctes de hasard sauvage, à savoir l'«effet Noé» (événements catastrophiques isolés) et l'«effet Joseph» (alternances de vaches grasses et de vaches maigres). Utilisant ces termes, les diagrammes qualifiés de «compliqués», ont la vertu de combiner ces deux effets.

La provenance des diagrammes compliqués n'est pas évidente, même pour l'œil ! Dans ce mélange, les données réelles sont les actions IBM, 1e et le taux de change du dollar en deutschmarks 1f ; les simulations 1d, 1g et 1h concernent mon modèle actuel, qui introduit les multifractales et englobe les précédents.

Le modèle brownien, 1a, sans qu'on l'ait cherché, et, à dessein, les modèles 1b et 1c possèdent la propriété essentielle d'être fractals, plus précisément auto-affines. Ce terme signifie que, du point de vue statistique, tout petit morceau de chronique est identique à tout grand morceau dont la taille aurait été convenablement diminuée. Or, les défaillances de ces modèles étant patentées, ils ont déjà subi des «retouches» qui sont de toutes sortes, mais ont pour caractéristique commune de détruire la fractalité.

Il est bien vrai que la fractalité se heurte presque toujours à des limitations variées, telles que des coupures internes et externes. Cependant, l'auto-affinité n'est pas une idée arbitraire ; c'est, au contraire, l'expression mathématique d'une idée très répandue, qui appartient même au folklore des marchés, à savoir que l'examen de la forme d'un zigzag boursier ne suffit pas à elle seule pour deviner si les variations représentées sont prises d'heure en heure, de jour en jour ou de minute en minute... Par conséquent, pour ne pas perdre la caractéristique fondamentale de

l'auto-affinité, il est bon que les retouches n'interviennent qu'en dernière extrémité. Le modèle multifractal fait d'emblée mieux que les retouches les plus tentantes, tout en préservant une fractalité généralisée.

Le meilleur moyen de montrer la nature de cette «reprise à la base» fractale est d'en donner des «cartons», mot entendu dans le sens d'esquisse ou de caricature, un peu comme on parle de carton de

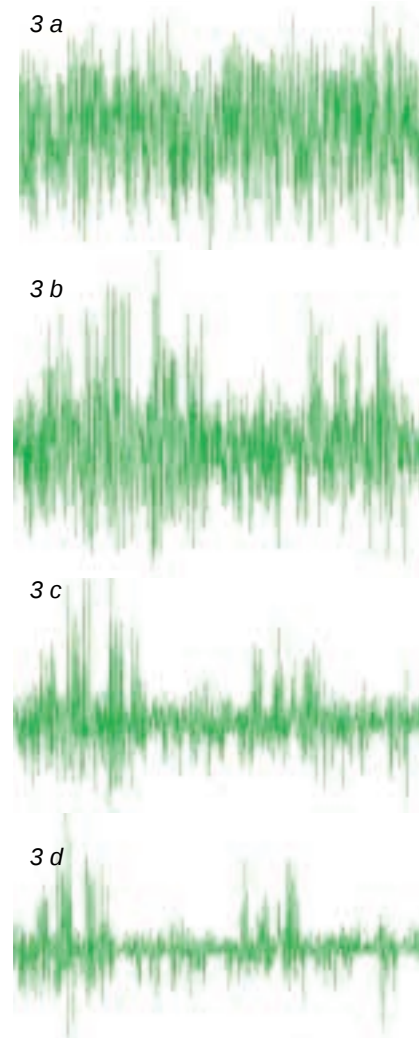
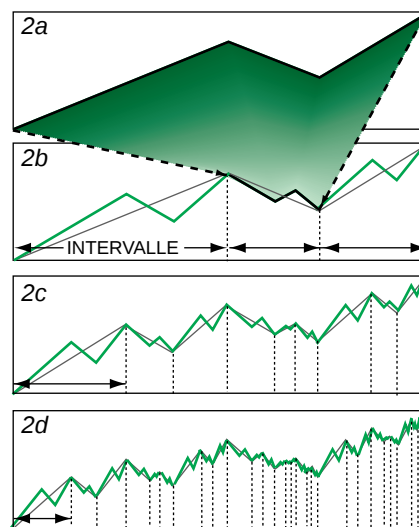
tapisserie. Dans leur principe, ces cartons sont semblables au carton des côtes d'une île qu'est devenue la célèbre courbe en flocon de neige de von Koch. Avant que la géométrie fractale n'en fasse un outil de la science, ladite courbe a joué deux rôles successifs, celui de contre-exemple et celui de jeu mathématique.

Décrivons ces cartons représentés sur la figure 2 : on part d'un rectangle que traverse un «générateur», une ligne brisée continue qui constitue le graphe d'une fonction partant d'en bas à gauche, et procédant en haut à droite sans reculer dans le sens horizontal, tout en pouvant osciller dans le sens vertical (2a). Puis chacun des trois intervalles du générateur est remplacé par le générateur tout entier, qui aura été resserré en accordéon pour avoir la même étendue que cet intervalle. L'interpolation se poursuit (2b, 2c, 2d) sans fin.

Les propriétés du résultat final dépendent de la forme du générateur et peuvent prendre des formes d'une étonnante variété. Par exemple, les diagrammes de la figure 3 exhibent une volatilité d'abord constante, puis de plus en plus variable.

Au-delà des cartons, je propose de représenter la variation des prix comme étant un mouvement brownien (ou brownien fractionnaire) modifié de telle façon que sa variable «temps» ne soit pas le temps d'horloge, mais en soit une fonction multifractale qualifiée de temps boursier.

Il existe déjà des résultats sur le modèle multifractal qui confirment par les mathématiques ce que l'œil nous avait appris. Mais ces résultats sont en quantité insuffisante. En attendant qu'ils se multiplient, la première tâche sera d'atteler le modèle avec la méthode de Monte Carlo pour aider à l'évaluation des risques de portefeuille. Le modèle brownien, pour lequel une belle théorie mathématique existe, est imprudent, car il prédit des risques très faibles. Le modèle 1b prédit des risques beaucoup plus grands, mais il ne tient pas compte de la concentration des grands changements et dans beaucoup de cas exagère leurs valeurs. Le modèle du temps multifractal corrige d'emblée ces deux défauts. Son exploration ne fait que commencer et, s'il ne prétend pas dire le dernier mot, il paraît plein de promesses.



Benoit MANDELBROT est *Abraham Robinson Professor of Mathematical Sciences* à l'Université de Yale.

Deux ouvrages qu'il vient de faire paraître développent les idées de cette chronique : *Fractales, hasard et finance*, chez Flammarion, et *Fractals and Scaling in Finance : Discontinuity, Concentration, Risk*, chez Springer.