

simples se limitent nécessairement à illustrer des modèles partiels de la réalité.

MODÈLES ET RÉALITÉ

Révétons leurs sources. Le modèle (1a) a été proposé par Louis Bachelier en 1900 ; fondé sur l'idée que les prix suivent des «promenades aléatoires», il a conduit à ce qui allait devenir le mouvement brownien. Il s'agit là du prototype même du hasard bénin, illustré par les écarts par rapport à la moyenne caractéristique d'un tirage à pile ou face. Si ce modèle avait été réaliste, la Bourse n'aurait pas été profondément plus compliquée à étudier que les gaz en équilibre.

Continuons. Le diagramme (1b) illustre un premier modèle, que je proposai en 1963, fondé sur les processus stables (ce qui allait devenir le «vol de Lévy»). Le diagramme (1c) illustre un deuxième modèle, que je proposai en 1965, fondé sur le mouvement brownien fractionnaire. Chacun de ces deux modèles incorpore une des deux formes distinctes de hasard sauvage, à savoir l'«effet Noé» (événements catastrophiques isolés) et l'«effet Joseph» (alternances de vaches grasses et de vaches maigres). Utilisant ces termes, les diagrammes qualifiés de «compliqués», ont la vertu de combiner ces deux effets.

La provenance des diagrammes compliqués n'est pas évidente, même pour l'œil ! Dans ce mélange, les données réelles sont les actions IBM, 1e et le taux de change du dollar en deutschmarks 1f ; les simulations 1d, 1g et 1h concernent mon modèle actuel, qui introduit les multifractales et englobe les précédents.

Le modèle brownien, 1a, sans qu'on l'ait cherché, et, à dessein, les modèles 1b et 1c possèdent la propriété essentielle d'être fractals, plus précisément auto-affines. Ce terme signifie que, du point de vue statistique, tout petit morceau de chronique est identique à tout grand morceau dont la taille aurait été convenablement diminuée. Or, les défaillances de ces modèles étant patentées, ils ont déjà subi des «retouches» qui sont de toutes sortes, mais ont pour caractéristique commune de détruire la fractalité.

Il est bien vrai que la fractalité se heurte presque toujours à des limitations variées, telles que des coupures internes et externes. Cependant, l'auto-affinité n'est pas une idée arbitraire ; c'est, au contraire, l'expression mathématique d'une idée très répandue, qui appartient même au folklore des marchés, à savoir que l'examen de la forme d'un zigzag boursier ne suffit pas à elle seule pour deviner si les variations représentées sont prises d'heure en heure, de jour en jour ou de minute en minute... Par conséquent, pour ne pas perdre la caractéristique fondamentale de

l'auto-affinité, il est bon que les retouches n'interviennent qu'en dernière extrémité. Le modèle multifractal fait d'emblée mieux que les retouches les plus tentantes, tout en préservant une fractalité généralisée.

Le meilleur moyen de montrer la nature de cette «reprise à la base» fractale est d'en donner des «cartons», mot entendu dans le sens d'esquisse ou de caricature, un peu comme on parle de carton de

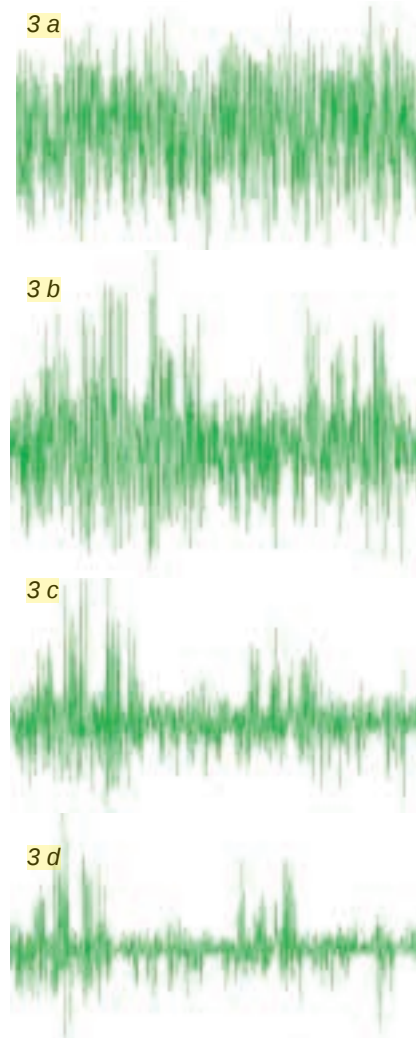
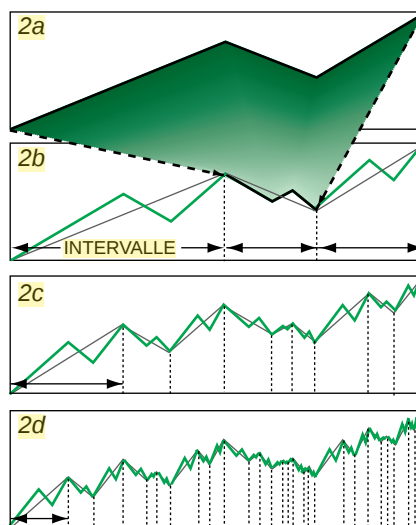
tapisserie. Dans leur principe, ces cartons sont semblables au carton des côtes d'une île qu'est devenue la célèbre courbe en flocon de neige de von Koch. Avant que la géométrie fractale n'en fasse un outil de la science, ladite courbe a joué deux rôles successifs, celui de contre-exemple et celui de jeu mathématique.

Décrivons ces cartons représentés sur la figure 2 : on part d'un rectangle que traverse un «générateur», une ligne brisée continue qui constitue le graphe d'une fonction partant d'en bas à gauche, et procédant en haut à droite sans reculer dans le sens horizontal, tout en pouvant osciller dans le sens vertical (2a). Puis chacun des trois intervalles du générateur est remplacé par le générateur tout entier, qui aura été resserré en accordéon pour avoir la même étendue que cet intervalle. L'interpolation se poursuit (2b, 2c, 2d) sans fin.

Les propriétés du résultat final dépendent de la forme du générateur et peuvent prendre des formes d'une étonnante variété. Par exemple, les diagrammes de la figure 3 exhibent une volatilité d'abord constante, puis de plus en plus variable.

Au-delà des cartons, je propose de représenter la variation des prix comme étant un mouvement brownien (ou brownien fractionnaire) modifié de telle façon que sa variable «temps» ne soit pas le temps d'horloge, mais en soit une fonction multifractale qualifiée de temps boursier.

Il existe déjà des résultats sur le modèle multifractal qui confirment par les mathématiques ce que l'œil nous avait appris. Mais ces résultats sont en quantité insuffisante. En attendant qu'ils se multiplient, la première tâche sera d'atteler le modèle avec la méthode de Monte Carlo pour aider à l'évaluation des risques de portefeuille. Le modèle brownien, pour lequel une belle théorie mathématique existe, est imprudent, car il prédit des risques très faibles. Le modèle 1b prédit des risques beaucoup plus grands, mais il ne tient pas compte de la concentration des grands changements et dans beaucoup de cas exagère leurs valeurs. Le modèle du temps multifractal corrige d'emblée ces deux défauts. Son exploration ne fait que commencer et, s'il ne prétend pas dire le dernier mot, il paraît plein de promesses.



Benoit MANDELBROT est *Abraham Robinson Professor of Mathematical Sciences* à l'Université de Yale.

Deux ouvrages qu'il vient de faire paraître développent les idées de cette chronique : *Fractales, hasard et finance*, chez Flammarion, et *Fractals and Scaling in Finance : Discontinuity, Concentration, Risk*, chez Springer.