

simples se limitent nécessairement à illustrer des modèles partiels de la réalité.

MODÈLES ET RÉALITÉ

Révétons leurs sources. Le modèle (1a) a été proposé par Louis Bachelier en 1900 ; fondé sur l'idée que les prix suivent des «promenades aléatoires», il a conduit à ce qui allait devenir le mouvement brownien. Il s'agit là du prototype même du hasard bénin, illustré par les écarts par rapport à la moyenne caractéristique d'un tirage à pile ou face. Si ce modèle avait été réaliste, la Bourse n'aurait pas été profondément plus compliquée à étudier que les gaz en équilibre.

Continuons. Le diagramme (1b) illustre un premier modèle, que je proposai en 1963, fondé sur les processus stables (ce qui allait devenir le «vol de Lévy»). Le diagramme (1c) illustre un deuxième modèle, que je proposai en 1965, fondé sur le mouvement brownien fractionnaire. Chacun de ces deux modèles incorpore une des deux formes distinctes de hasard sauvage, à savoir l'«effet Noé» (événements catastrophiques isolés) et l'«effet Joseph» (alternances de vaches grasses et de vaches maigres). Utilisant ces termes, les diagrammes qualifiés de «compliqués», ont la vertu de combiner ces deux effets.

La provenance des diagrammes compliqués n'est pas évidente, même pour l'œil ! Dans ce mélange, les données réelles sont les actions IBM, 1e et le taux de change du dollar en deutschmarks 1f ; les simulations 1d, 1g et 1h concernent mon modèle actuel, qui introduit les multifractales et englobe les précédents.

Le modèle brownien, 1a, sans qu'on l'ait cherché, et, à dessein, les modèles 1b et 1c possèdent la propriété essentielle d'être fractals, plus précisément auto-affines. Ce terme signifie que, du point de vue statistique, tout petit morceau de chronique est identique à tout grand morceau dont la taille aurait été convenablement diminuée. Or, les défaillances de ces modèles étant patentes, ils ont déjà subi des «retouches» qui sont de toutes sortes, mais ont pour caractéristique commune de détruire la fractalité.

Il est bien vrai que la fractalité se heurte presque toujours à des limitations variées, telles que des coupures internes et externes. Cependant, l'auto-affinité n'est pas une idée arbitraire ; c'est, au contraire, l'expression mathématique d'une idée très répandue, qui appartient même au folklore des marchés, à savoir que l'examen de la forme d'un zigzag boursier ne suffit pas à elle seule pour deviner si les variations représentées sont prises d'heure en heure, de jour en jour ou de minute en minute... Par conséquent, pour ne pas perdre la caractéristique fondamentale de

l'auto-affinité, il est bon que les retouches n'interviennent qu'en dernière extrémité. Le modèle multifractal fait d'emblée mieux que les retouches les plus tentantes, tout en préservant une fractalité généralisée.

Le meilleur moyen de montrer la nature de cette «reprise à la base» fractale est d'en donner des «cartons», mot entendu dans le sens d'esquisse ou de caricature, un peu comme on parle de carton de

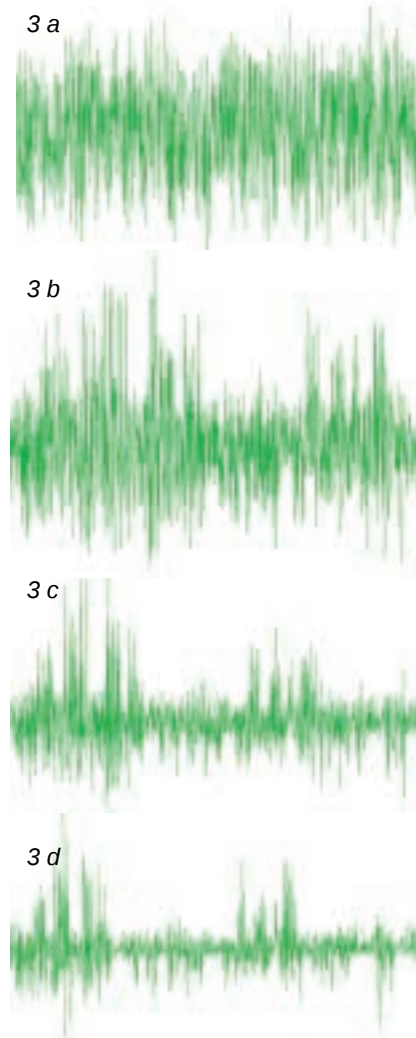
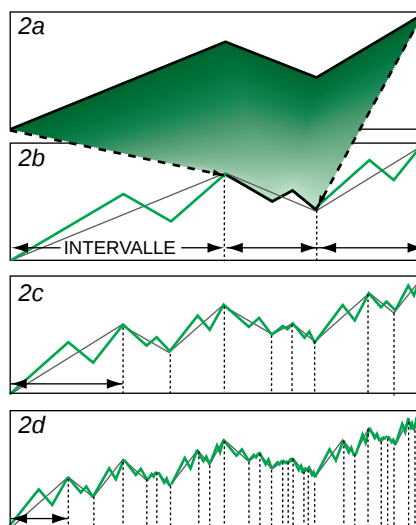
tapisserie. Dans leur principe, ces cartons sont semblables au carton des côtes d'une île qu'est devenue la célèbre courbe en flocon de neige de von Koch. Avant que la géométrie fractale n'en fasse un outil de la science, ladite courbe a joué deux rôles successifs, celui de contre-exemple et celui de jeu mathématique.

Décrivons ces cartons représentés sur la figure 2 : on part d'un rectangle que traverse un «générateur», une ligne brisée continue qui constitue le graphe d'une fonction partant d'en bas à gauche, et procédant en haut à droite sans reculer dans le sens horizontal, tout en pouvant osciller dans le sens vertical (2a). Puis chacun des trois intervalles du générateur est remplacé par le générateur tout entier, qui aura été resserré en accordéon pour avoir la même étendue que cet intervalle. L'interpolation se poursuit (2b, 2c, 2d) sans fin.

Les propriétés du résultat final dépendent de la forme du générateur et peuvent prendre des formes d'une étonnante variété. Par exemple, les diagrammes de la figure 3 exhibent une volatilité d'abord constante, puis de plus en plus variable.

Au-delà des cartons, je propose de représenter la variation des prix comme étant un mouvement brownien (ou brownien fractionnaire) modifié de telle façon que sa variable «temps» ne soit pas le temps d'horloge, mais en soit une fonction multifractale qualifiée de temps boursier.

Il existe déjà des résultats sur le modèle multifractal qui confirment par les mathématiques ce que l'œil nous avait appris. Mais ces résultats sont en quantité insuffisante. En attendant qu'ils se multiplient, la première tâche sera d'atteler le modèle avec la méthode de Monte Carlo pour aider à l'évaluation des risques de portefeuille. Le modèle brownien, pour lequel une belle théorie mathématique existe, est imprudent, car il prédit des risques très faibles. Le modèle 1b prédit des risques beaucoup plus grands, mais il ne tient pas compte de la concentration des grands changements et dans beaucoup de cas exagère leurs valeurs. Le modèle du temps multifractal corrige d'emblée ces deux défauts. Son exploration ne fait que commencer et, s'il ne prétend pas dire le dernier mot, il paraît plein de promesses.



Benoit MANDELBROT est *Abraham Robinson Professor of Mathematical Sciences* à l'Université de Yale.

Deux ouvrages qu'il vient de faire paraître développent les idées de cette chronique : *Fractales, hasard et finance*, chez Flammarion, et *Fractals and Scaling in Finance : Discontinuity, Concentration, Risk*, chez Springer.

Chaud devant

HERVÉ THIS

Pourquoi les aliments piquants brûlent la bouche.

Comment créer un plat parfaitement savoureux ? Le cuisinier peut naturellement imaginer des variations de recettes anciennes, afin d'assembler des ingrédients dont l'association a été validée au cours de l'histoire, mais ne gagnerait-il pas à se souvenir que les molécules qu'il réunit doivent stimuler harmonieusement la gustation, l'olfaction, ainsi que les capteurs thermiques, mécaniques ou du piquant ?

La mise en application de cette idée manque toutefois de bases précises. On sait que l'acidité ou l'amertume sont combattues par le sucré, ou que le salé facilite la perception des autres saveurs, par exemple, mais une compréhension moléculaire de la physiologie du goût manque encore : pourquoi le piment met-il la bouche en feu, par exemple ? pourquoi les consommateurs réguliers de piments supportent-ils des doses intolérables aux novices ? pourquoi aimons-nous manger des produits qui nous endolorissent ? David Julius et ses collègues de l'Université de San Francisco éclairent ces questions en étudiant le récepteur de la capsaïcine, la principale molécule piquante du piment.

Une avancée importante de la physiologie humaine avait été, il y a quelques décennies, l'exploration des effets de la morphine sur le cerveau, et l'identification de récepteurs de la morphine et de ses dérivés. Si l'organisme contenait de tels récepteurs, il devait exister dans le corps des molécules analogues à la morphine. La prévision était exacte : on découvrit bientôt des opioïdes endogènes, ainsi que le système de régulation qui supprime la douleur. De même, raisonnèrent D. Julius et ses collègues, si notre espèce consomme des aliments qui contiennent des molécules piquantes, et qui activent ainsi les voies de la douleur, c'est sans doute que l'évolution a doté notre organisme de récepteurs qui sont activés par ces molécules... et surtout par des molécules endogènes qui interviennent probablement dans les mécanismes de la douleur.

Comment identifier ces récepteurs ? Les biologistes ont isolé les ARN messagers présents dans les neurones qui détectent le piquant dans la bouche et construit un groupe de molécules d'ADN correspondantes ; puis ils ont introduit ces ADN dans diverses cultures de cellules pour observer les liaisons de la capsaïcine avec les protéines produites par l'ADN inséré. Ils ont finalement identifié l'ADN qui code le récepteur, nommé VR1, de la capsaïcine. L'introduction de cet ADN dans des œufs de grenouille a fourni des cultures de cellules dont la membrane contenait le récepteur.



Le piquant des piments est décrit par des unités Scoville : les piments guajillos (à gauche) ont un piquant de 3 000 unités Scoville, tandis que les piments de Cayenne (au centre) ont un piquant de l'ordre de 40 000 ; le piquant des piments habaneros (à droite) atteint jusqu'à 300 000 unités Scoville. Les unités Scoville sont proportionnelles à la concentration en une molécule nommée capsaïcine.

Les biologistes ont alors analysé que VR1 est un canal membranaire, c'est-à-dire une protéine qui règle le passage d'ions (surtout des ions calcium), entre l'extérieur et l'intérieur des cellules. Il est composé de quatre sous-unités, et sa liaison à la capsaïcine provoque son ouverture.

En quoi ces études aident-elles la gastronomie ? Des études psychophysiologiques anciennes avaient conduit à la mise au point d'une sorte d'échelle de Richter du piquant : l'échelle du docteur Wilbur Scoville. Les enre-

gistements électrophysiologiques des cellules de grenouille dotées du récepteur VR1 démontrent la validité de ce classement : la réaction des cellules et, sans doute aussi, la réponse cérébrale, sont proportionnelles à la concentration en capsaïcine.

D'autre part, D. Julius et ses collègues ont montré que la capsaïcine, soluble dans les graisses, peut se lier au canal, à l'intérieur ou à l'extérieur des neurones. Son affinité pour les graisses explique pourquoi l'eau n'éteint pas les incendies de la bouche, tandis que l'absorption de pain est plus efficace.

Troisièmement l'exposition des récepteurs à la capsaïcine a donné des indications sur l'accoutumance aux mets épicés. L'ouverture du canal VR1 provoque l'afflux d'ions calcium dans les neurones, qui émettent une impulsion nerveuse quand le potentiel électrique intracellulaire atteint un seuil. Toutefois l'excès d'ions calcium intracellulaire est nocif : les œufs de grenouille dotés du récepteur VR1 meurent après quelques heures d'une exposition continue à la capsaïcine, sans doute parce que l'afflux d'ions calcium est excessif.

La perte de sensibilité des amateurs d'épices, qui semble résulter de la mort des fibres sensorielles, expliquerait l'effet paradoxal de la capsaïcine dans le traitement des névropathies virales ou diabétiques, ainsi que dans la polyarthrite rhumatoïde : tuant les neurones de la douleur, la capsaïcine provoquerait une analgésie.

Enfin les biologistes ont mesuré que des augmentations rapides de températures provoquent, dans le récepteur VR1, des courants d'ions analogues aux courants provoqués par la capsaïcine : le canal VR1 est un capteur simultanément chimique et thermique... et voilà pourquoi la consommation des plats pimentés met la bouche en feu.

Prochain rendez-vous France Info et Pour la Science le 31 décembre 1997, avec la chronique Info Sciences de Marie-Odile Monchicourt.



AKG Photo

JEU-CONCOURS N° 42

PIERRE TOUGNE

Jeu d'allumettes

Nombreux sont les jeux qui se jouent avec des allumettes. Le plus connu est certainement le «Jeu de Marienbad» qu'Alain Resnais montre dans son film *L'année dernière à Marienbad*. Son analyse, un classique des jeux mathématiques, n'est pas des plus faciles. Ce mois-ci, je vous propose d'étudier un jeu du même type. On forme un tas d'un nombre impair d'allumettes et deux joueurs, à tour de rôle, en extraie une ou deux allumettes, jusqu'à épuisement du tas. Le gagnant est celui qui a retiré un nombre impair d'allumettes. La règle garantit l'existence d'un gagnant, car la somme des allumettes retirées par chaque joueur étant un nombre impair, un des deux joueurs en aura retiré néces-

sairement un nombre impair tandis que l'autre en aura retiré un nombre pair. Pour un tas de 19 allumettes, qui, du premier ou du second joueur, en admettant que les deux joueurs jouent parfaitement, gagnera la partie et avec quelle stratégie? Plus généralement, selon le nombre impair N d'allumettes du tas initial, quel sera le joueur gagnant, celui qui commence ou l'autre?

Envoyez vos réponses aux questions sur carte postale à *Pour la Science*, 8, rue Férou, 75006 Paris. Parmi les réponses exactes reçues pendant le mois de décembre 1997, dix gagnants tirés au sort recevront un livre.

RÉPONSE AU JEU-CONCOURS N° 40

N'ayant pas précisé la forme des réponses aux questions, les lecteurs se sont partagés en deux groupes selon le type de réponse qu'ils considéraient comme autorisée. Dans le premier groupe, qui ne considère que les réponses oui ou non (ou éventuellement une direction), le nombre de questions à poser est au maximum de quatre selon le principe suivant : on pose aux trois autochtones une même question, dont la réponse est évidente, comme par exemple : «est-ce que $2 + 2 = 4$?». Sur les trois réponses, on en aura toujours deux identiques, car le menteur répondra non, celui qui dit la vérité oui et le fantasque oui ou non selon son humeur. Ainsi l'autochtone qui donne une réponse différente des deux autres sera soit le menteur, soit celui qui dit la vérité. Maintenant on demande à cet autochtone : «Quelle est la route de Paris?». S'il a répondu précédemment oui, on suit son indication, s'il a répondu non, on prend l'autre route.

Remarquez que si l'on a la chance d'avoir la même réponse à la première question pour les deux premiers autochtones, il n'est pas besoin de la poser au troisième, car on connaît la réponse et l'on passe directement à la deuxième question, donc au total trois questions. Pour le deuxième groupe, on admet en

plus des réponses du premier groupe, l'absence de réponse pour le menteur ou celui qui dit la vérité à une question à laquelle il ne sait pas répondre tandis que le fantasque répondra toujours. Dans ce cas, il faut trois questions maximum selon le schéma suivant : on désigne par A , B et C les trois autochtones et l'on pose les deux questions suivantes à A : «Si je demande à B la route de Paris, quelle sera sa réponse?». «Si je demande à C la route de Paris, quelle sera sa réponse?». S'il n'y a qu'une seule réponse, A est soit le menteur, soit celui qui dit la vérité et la route de Paris sera le contraire de celle indiquée. Enfin, si l'on a deux réponses, c'est parce que A est le fantasque et on pose à B la question : «Si je demande à C la route de Paris, quelle sera sa réponse?» et la route de Paris sera l'opposée de celle indiquée. Remarquez que dans deux cas sur trois, on connaîtra la bonne route en seulement deux questions.

Enfin, je ne résiste pas à vous indiquer la solution humoristique sans question d'un fidèle lecteur de la rubrique : [J'annonce aux autochtones une nouvelle du genre «il n'y a pas une seule goutte de vin à Rome, mais il coule à flots à Paris»] et il me suffira de prendre la même route que celle qu'ils emprunteront tous les trois!