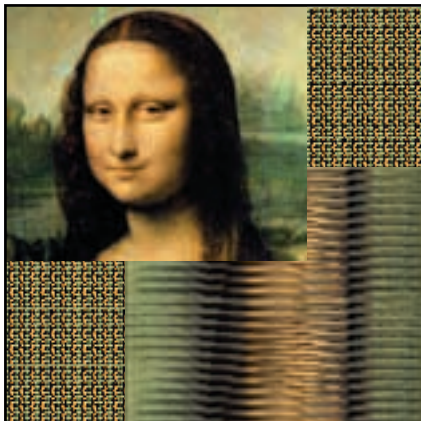




Images brouillées, images retrouvées

JEAN-PAUL DELAHAYE • PHILIPPE MATHIEU

La transformation du boulanger, du photomaton, et les charmes de l'arithmétique.

Le boulanger prend la pâte, l'étire, la replie, puis recommence. C'est la «transformation du boulanger» que les spécialistes du chaos utilisent depuis 20 ans pour expliquer les subtiles interactions entre l'ordre et la complexité, entre le déterminisme et le hasard. Par cette transformation, croit notre boulanger, les particules de pâte se mélangent, et sa pâte s'homogénéise. Est-ce certain ?

Notre projet ici sera modeste et ludique : nous allons utiliser la métaphore pâtissière pour maltraiter des images et observer quelques phénomènes étranges. La transformation du boulanger et celle que nous appellerons *la transformation du photomaton* nous feront assister en direct au brouillage progressif d'une image et à son «débrouillage» inattendu.

Un logiciel pour Windows 95 réalisé à l'occasion de cet article est disponible. Les lecteurs pourront soit le demander à la revue (envoyer une disquette et une enveloppe timbrée pour le retour), soit le télécharger à partir du site Internet : <http://www.lifl.fr/~mathieu/transform>.

Le site contient des illustrations complémentaires et propose d'autres transformations avec lesquelles vous pourrez expérimenter en suivant les indications données dans cet article.

LES MÉLANGES BIJECTIFS DE PIXELS

Une image d'ordinateur est composée d'un nombre fini de points appelés pixels, qu'il est possible de traiter individuellement et donc de mélanger comme on

mélange des cartes à jouer (nous reviendrons sur ce parallèle).

Les mélanges de points les plus intéressants sont les mélanges bijectifs (appelés aussi permutations) : chaque point d'une image est envoyé à la place d'un autre point dans la transformée, et aucun point n'est perdu. Après un mélange bijectif, l'image est toujours présente (puisque aucun point n'a été effacé), mais elle est mélangée et parfois méconnaissable.

Le mélange bijectif ayant été effectué, on peut l'appliquer une deuxième fois, puis une troisième, etc. On obtient ainsi une série d'images complètes, mais où l'on éprouve des difficultés – en général croissantes – à reconnaître l'image de départ.

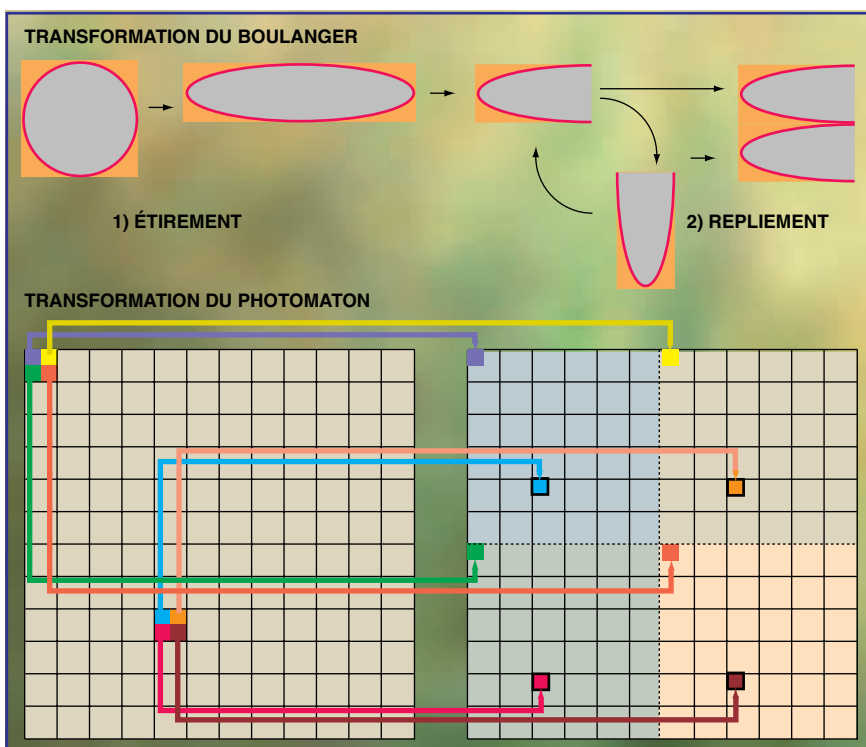
Avec des images composées d'un nombre fini de pixels (c'est toujours le cas en informatique), un miracle se produit : au bout d'un certain temps, l'image de départ réapparaît absolument identique. Ce temps de retour est parfois énorme, mais nous verrons comment le calculer.

Dans le cas continu – c'est-à-dire quand on considère une image comportant une infinité de points –, ce retour à l'ordre est exceptionnel. Cependant, pour certaines transformations, il se produit approximativement ce qui intéresse les théoriciens de l'ordre et du désordre. Le retour approximatif dans le cas continu n'est peut-être pas étonnant puisque, dans le cas fini, le retour exact est une règle absolue : quel que soit le mélange bijectif considéré, le retour au départ se produit.

Partons pour ce voyage d'image en image cadencé par les transformations bijectives qui nous feront observer de curieuses brusques réapparitions de l'ordre là où le chaos semble s'imposer.

LE BOULANGER DISCRET

Commençons par la transformation du boulanger. Nous partons d'une image de n lignes et m colonnes. Pour la couper en deux selon la hauteur et la largeur,



1. Le déplacement des points dans les transformations du boulanger et du photomaton.

nous supposons que n et m sont des nombres pairs.

Les points de la première ligne ont pour coordonnées :

$(0,0), (1,0), \dots, (m-2,0), (m-1,0)$.

Ceux de la deuxième ligne :

$(0,1), (1,1), \dots, (m-2,1), (m-1,1)$, etc.

Nous simulerons l'étirement de la pâte en interpénétrant les lignes paires et les lignes impaires : la hauteur du rectangle de départ est ainsi divisée par deux et sa longueur multipliée par deux. Les deux lignes premières sont donc maintenant : $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1), \dots, (m-2,0), (m-2,1), (m-1,0), (m-1,1)$

$(0,2), (0,3), (1,2), (1,3), \dots, (m-2,2), (m-2,3), (m-1,2), (m-1,3)$, etc.

Le repliement de la pâte consiste à couper le rectangle en deux et à placer la partie droite sous la partie gauche après l'avoir fait pivoter de 180 degrés. Les points des premières lignes sont alors : $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1), \dots, (m/2-1,0), (m/2-1,1)$

$(0,2), (0,3), (1,2), (1,3), \dots, (m/2-1,2), (m/2-1,3)$, etc.

et les points des dernières lignes résultant du repliement de la moitié droite : $(m-1,3), (m-1,2), (m-2,3), (m-2,2), \dots, (m/2,3), (m/2,2)$,

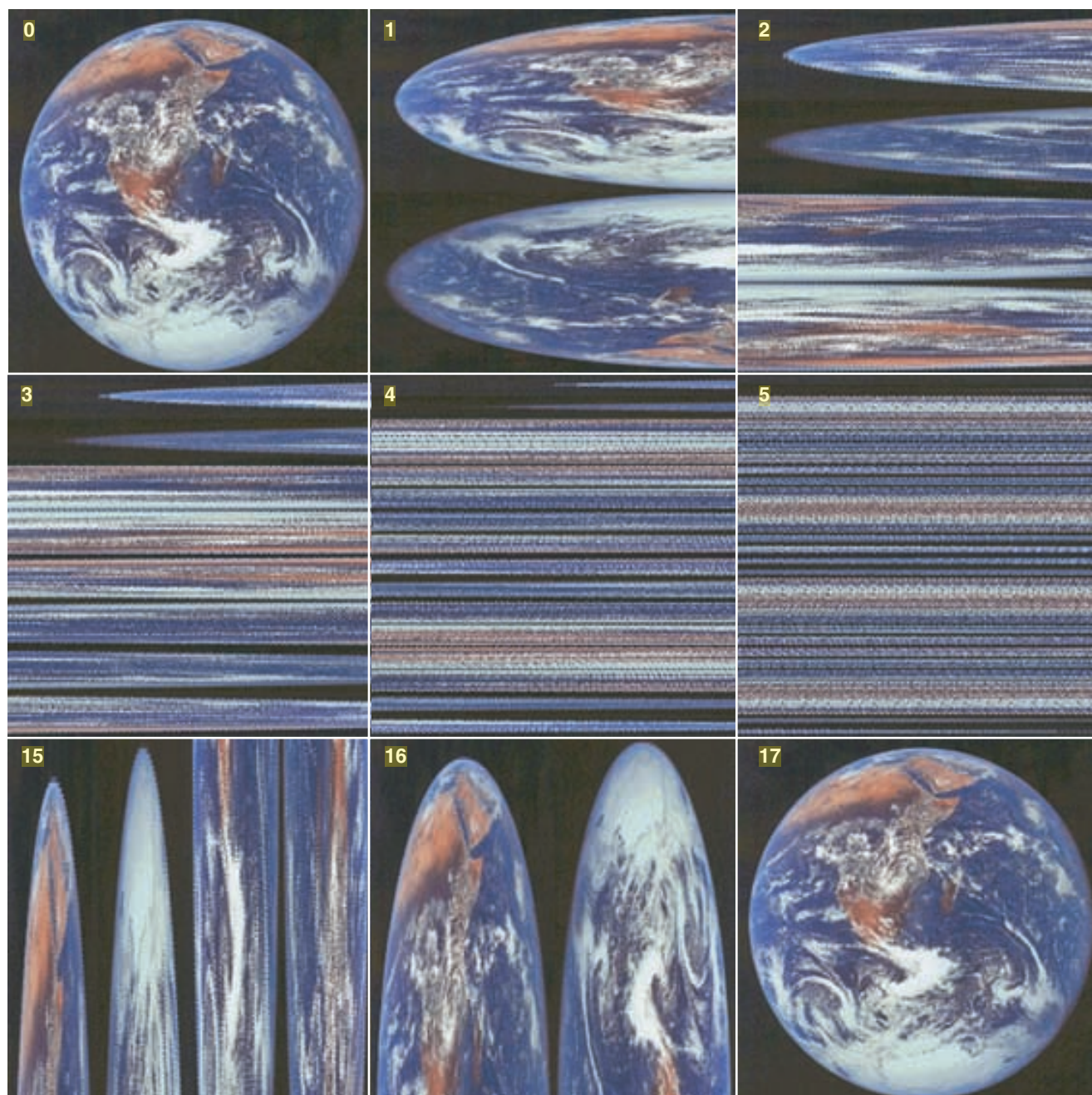
$(m-1,1), (m-1,0), (m-2,1), (m-2,0), \dots, (m/2,1), (m/2,0)$,

Bien sûr, tout cela n'est pas très difficile à programmer ; plus difficile, en revanche, est la mise au point d'une interface agréable.

Nous pouvons donc maintenant expérimenter. L'attente du retour peut être très longue (voir la figure 3).

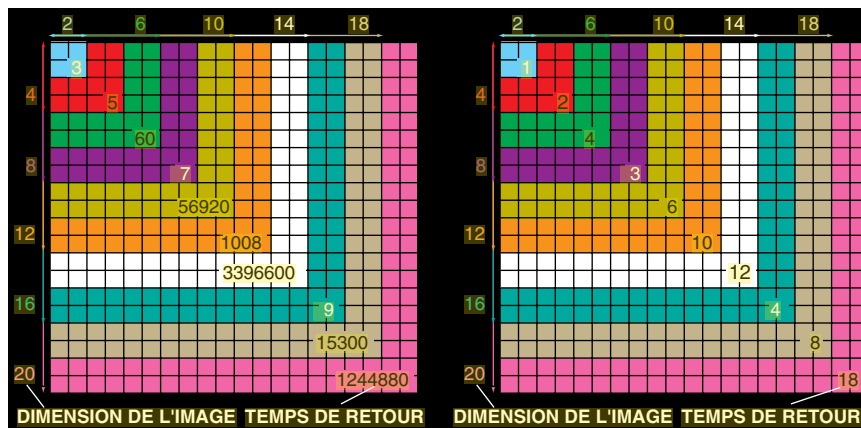
Pour simplifier dans ce tableau, nous ne nous sommes intéressés qu'aux images carrées de $2p$ lignes et $2p$ colonnes.

Nous ignorons s'il existe une loi générale simple donnant ce temps de retour.



2. Le retour en 17 étapes avec la transformation du boulanger. Neuf images obtenues par la transformation du boulanger à la Terre en format 256×256 . Le retour se fait après la dix-septième applica-

tion de la transformation. Les images représentées sont l'image initiale (numérotée 0), puis celles obtenues après 1, 2, 3, 4, 5, 15, 16 et 17 applications de la transformation du boulanger.



3. Les temps de retour (nombre de transformations redonnant l'état initial de l'image) sont indiqués dans les coins inférieurs droits des carrés représentant différentes dimensions d'image. À gauche, la transformation du boulanger ; à droite, la transformation du photomaton.

Nous avons simplement constaté que si $n = 2^p$ le temps de retour est $2p + 1$. Comme nous allons le voir avec la transformation du photomaton, ces déterminations du temps de retour sont parfois assez difficiles.

La figure 2 donne la série (partielle) des images qu'on obtient à partir de la Terre en format 256×256 . On remarquera un phénomène inattendu (sauf pour les spécialistes qui connaissaient le résultat) : l'image précédant le retour est le résultat de l'application d'une variante simple de la transformation du boulanger. Cette «transformation du boulanger inverse» consiste à étirer l'image – cette fois en un rectangle de largeur moitié et de hauteur double –, puis à replier le bas du rectangle en le faisant pivoter pour le placer à droite de la moitié du haut.

LE PHOTOMATON

La seconde transformation est encore plus surprenante. Elle montre que, dans un monde fini, en regardant de très loin une multitude de copies (approximatives) d'un objet donné, on le fait réapparaître. L'idée de cette transformation, qui nous l'a fait nommer photomaton, provient bien sûr de ces appareils qui vous délivrent quatre photographies d'identité semblables après que nous nous sommes assis dans une boîte bizarre qui nous a violemment éblouis.

Là encore, nous partons d'une image carrée ayant un nombre pair de lignes et de colonnes. Pour notre exposé, nous diviserons en quatre carrés l'image transformée, résultat de l'opération photomaton. Chaque groupe de quatre points

contigus constituant un petit carré est éclaté (voir la figure 1) ; chacun de ces points va dans un des quatre carrés et donne : (i) un point de l'image transformée dans le carré en haut à gauche ; (ii) un point dans le carré en haut à droite ; (iii) un point dans le carré en bas à gauche et (iv) un point en bas à gauche. Les nouveaux points sont placés dans les quatre carrés de la transformée, à l'endroit correspondant à celui dont provient le petit carré. Par exemple, les quatre points du coin en haut à droite :

$$(0, 0) (1, 0) \\ (0, 1) (1, 1)$$

vont respectivement occuper les places :

$$(0, 0) (n/2, 0) \\ (0, n/2) (n/2, n/2),$$

c'est-à-dire les quatre points en haut à droite des quatre quarts du carré. De même, les quatre points (juste à côté) :

$$(2, 0) (3, 0) \\ (2, 1) (3, 1)$$

vont respectivement occuper les places :

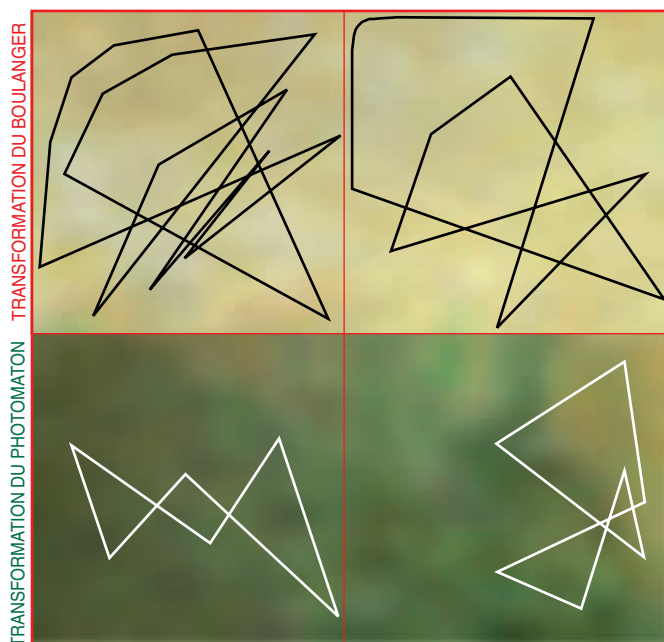
$$(1, 0) (n/2 + 1, 0) \\ (1, n/2) (n/2 + 1, n/2).$$

Le résultat des applications du photomaton, cette fois en partant d'un texte, (voir la figure 4) est, dans un premier temps, sans surprise : on assiste à une multiplication du texte que l'on obtient en quatre exemplaires, puis 16, puis 64, etc. Tout à coup, cependant, on retrouve l'image de départ. Ce phénomène se produit très rapidement. Pourquoi donc ?

L'image précédant le retour, là encore, mérite d'être examinée, car elle est parfaitement lisible : il s'agit de la superposition des quatre quarts de l'image qui ont



4. Le retour en 8 étapes avec la transformation du photomaton sur une image d'un texte de Verlaine, en format 256×256 .



5. Chaque point appartient à un cycle : il est en bonne place sur les images dont le numéro est un multiple de la longueur du cycle.