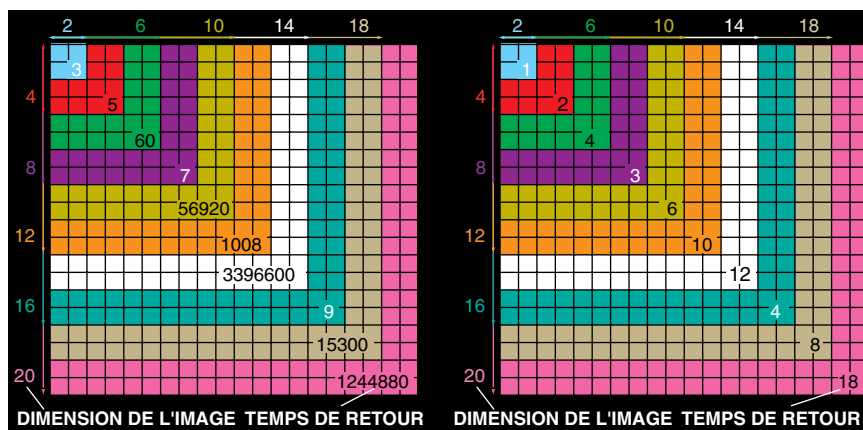




3. Les temps de retour (nombre de transformations redonnant l'état initial de l'image) sont indiqués dans les coins inférieurs droits des carrés représentant différentes dimensions d'image. À gauche, la transformation du boulanger ; à droite, la transformation du photomaton.

Nous avons simplement constaté que si $n = 2^p$ le temps de retour est $2p + 1$. Comme nous allons le voir avec la transformation du photomaton, ces déterminations du temps de retour sont parfois assez difficiles.

La figure 2 donne la série (partielle) des images qu'on obtient à partir de la Terre en format 256×256 . On remarquera un phénomène inattendu (sauf pour les spécialistes qui connaissaient le résultat) : l'image précédant le retour est le résultat de l'application d'une variante simple de la transformation du boulanger. Cette «transformation du boulanger inverse» consiste à étirer l'image – cette fois en un rectangle de largeur moitié et de hauteur double –, puis à replier le bas du rectangle en le faisant pivoter pour le placer à droite de la moitié du haut.

LE PHOTOMATON

La seconde transformation est encore plus surprenante. Elle montre que, dans un monde fini, en regardant de très loin une multitude de copies (approximatives) d'un objet donné, on le fait réapparaître. L'idée de cette transformation, qui nous l'a fait nommer photomaton, provient bien sûr de ces appareils qui vous délivrent quatre photographies d'identité semblables après que nous nous sommes assis dans une boîte bizarre qui nous a violemment éblouis.

Là encore, nous partons d'une image carrée ayant un nombre pair de lignes et de colonnes. Pour notre exposé, nous diviserons en quatre carrés l'image transformée, résultat de l'opération photomaton. Chaque groupe de quatre points

contigus constituant un petit carré est éclaté (voir la figure 1) ; chacun de ces points va dans un des quatre carrés et donne : (i) un point de l'image transformée dans le carré en haut à gauche ; (ii) un point dans le carré en haut à droite ; (iii) un point dans le carré en bas à gauche et (iv) un point en bas à gauche. Les nouveaux points sont placés dans les quatre carrés de la transformée, à l'endroit correspondant à celui dont provient le petit carré. Par exemple, les quatre points du coin en haut à droite :

(0, 0) (1, 0)
(0, 1) (1, 1)

vont respectivement occuper les places :

(0, 0) ($n/2$, 0)
(0, $n/2$) ($n/2$, $n/2$),

c'est-à-dire les quatre points en haut à droite des quatre quarts du carré. De même, les quatre points (juste à côté) :

(2, 0) (3, 0)
(2, 1) (3, 1)

vont respectivement occuper les places :

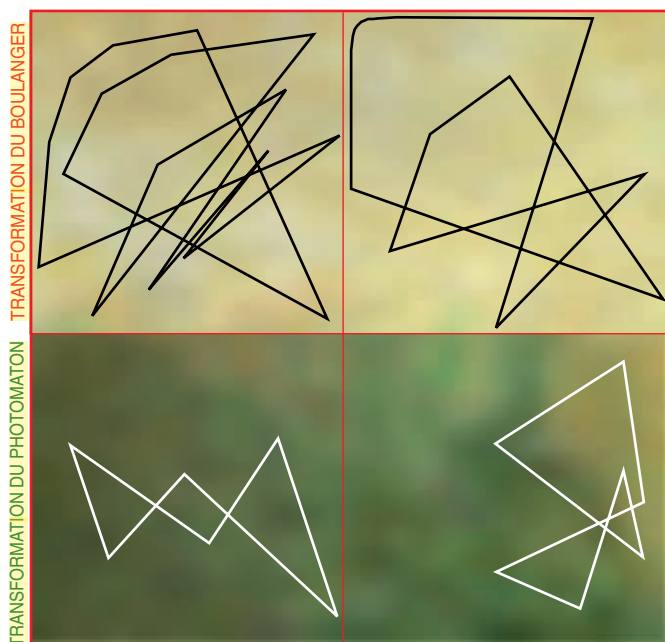
(1, 0) ($n/2 + 1$, 0)
(1, $n/2$) ($n/2 + 1$, $n/2$).

Le résultat des applications du photomaton, cette fois en partant d'un texte, (voir la figure 4) est, dans un premier temps, sans surprise : on assiste à une multiplication du texte que l'on obtient en quatre exemplaires, puis 16, puis 64, etc. Tout à coup, cependant, on retrouve l'image de départ. Ce phénomène se produit très rapidement. Pourquoi donc ?

L'image précédant le retour, là encore, mérite d'être examinée, car elle est parfaitement lisible : il s'agit de la superposition des quatre quarts de l'image qui ont



4. Le retour en 8 étapes avec la transformation du photomaton sur une image d'un texte de Verlaine, en format 256×256 .



5. Chaque point appartient à un cycle : il est en bonne place sur les images dont le numéro est un multiple de la longueur du cycle.

chacun été agrandis d'un facteur deux. L'image précédente, on le devine alors, est la superposition des 16 seizièmes du texte. Etc. Les temps de retour sont indiqués pour différentes tailles d'images sur la figure 3.

Dans le cas d'un temps de retour très long, ce qui est le cas avec l'image de la Joconde en format 252×212 , les images intermédiaires sont parfois étranges et laissent entrevoir des réminiscences partielles et déformées de l'image initiale (voir la figure 6).

Le retour à l'ordre surprend, car on comprend mal qu'en mélangeant de plus en plus les points d'une image – ce qui en apparence la fractionne en morceaux déformés et battus –, on fasse revenir comme par magie l'image initiale. C'est que, dans les mondes où tout est discret, notre intuition fondée sur le continu nous fait défaut : un parallèle peut être proposé avec la mécanique quantique, où le passage à une conception quantique (la « mise en quanta » est une façon de discrétiser le monde physique) donne aussi une théorie dont bien des aspects contredisent les attentes de l'intuition.

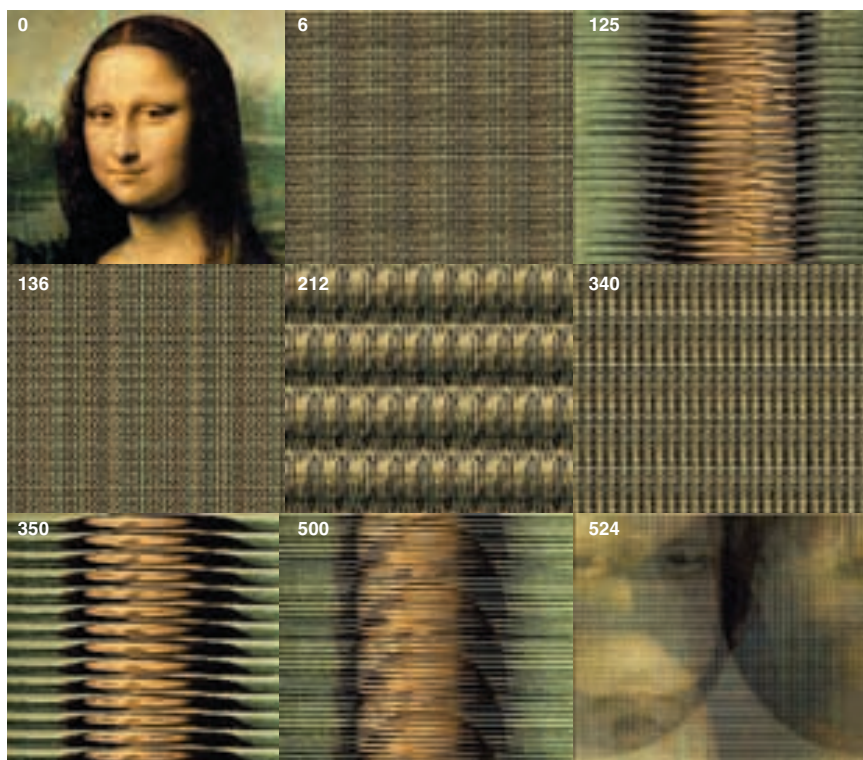
LE CALCUL DU TEMPS DE RETOUR

Contrairement à l'exemple précédent, nous avons réussi pour la transformation du photomaton à calculer le temps de retour.

La méthode qui nous a menés au résultat est indirecte. Lors de nos nombreux essais, nous avons pris les mélanges de cartes classiques et les avons appliqués aux lignes et aux colonnes d'une image. Dans le mélange de cartes le plus simple (appelé séparation binaire), nous faisons deux paquets à partir d'un en plaçant alternativement les cartes à droite et à gauche, puis nous regroupons les deux paquets en un seul, en mettant celui qui contient la première carte au-dessus (cette première carte reste donc à sa place).

Un peu de réflexion vous persuadera que la transformation qui consiste à effectuer simultanément la séparation binaire sur les numéros des colonnes et sur les numéros des lignes est identique à la transformation du photomaton.

Le mélange de cartes inverse de la séparation binaire est le mélange *out-faro* (ou *Pharaon out*) : on insère de façon parfaite les cartes du demi-paquet supérieur dans le demi-paquet inférieur, en s'arrangeant pour que la carte placée en tête y reste (si elle passait en second, il s'agirait de l'*in-faro*). Ce résultat sur l'inverse de la séparation binaire a été expliqué dans le numéro de *Pour la Science*



6. Transformation du photomaton appliquée à une image de la Joconde. L'image a une taille 252×212 . Le temps de retour est de 1 050 étapes. Certaines images sont totalement illisibles, d'autres laissent apparaître le motif initial découpé et déformé. Les images retenues ont pour numéro : 0 (image initiale), 6, 125, 136, 212, 340, 350, 500, 524. Nous vous invitons à utiliser notre logiciel pour admirer la série complète des 1 050 étapes.

de mars 1997). Le mélange inverse de la transformation photomaton est donc nécessairement le résultat de l'*out-faro* appliqué aux lignes et aux colonnes, c'est-à-dire ce que nous avons observé : une superposition des quatre quarts agrandis de l'image (une petite réflexion supplémentaire vous en persuadera).

Cette compréhension de la nature profonde du photomaton (un mélange binaire simultané sur les colonnes et sur les lignes) nous conduit au temps de retour pour toutes les tailles d'images. Voici le raisonnement :

– D'une part, la période de l'*out-faro* (identique, puisque c'est la transformation inverse à celle du mélange binaire) est connue. Dans le cas particulier où n est égal à 2^i , c'est i . Dans le cas général pour $n = 2p$, le retour est le plus petit entier q tel que : $2^q - 1$ est divisible par $2p - 1$.

Prenons par exemple $p = 5$:

$2^1 - 1 = 1$ n'est pas divisible par 9 ;

$2^2 - 1 = 3$ n'est pas divisible par 9 ;

$2^3 - 1 = 7$ n'est pas divisible par 9 ;

$2^4 - 1 = 15$ n'est pas divisible par 9 ;

$2^5 - 1 = 31$ n'est pas divisible par 9 ;

$2^6 - 1 = 63$ est divisible par 9 ;

donc le temps de retour pour $p = 5$ (paquet de dix cartes) est 6.

Pour $p = 6$: on voit que $2^{10} - 1 = 1\,023$ est divisible par 11 et qu'on n'obtient rien avant. Le temps de retour est 10.

– D'autre part, lorsqu'une transformation opère indépendamment sur les lignes et sur les colonnes, on montre que le temps de retour est le plus petit commun multiple du temps de retour de la transformation des colonnes et du temps de retour de la transformation des lignes.

Pour notre transformation du photomaton, il en résulte que, si le rectangle a pour taille $(2p) \times (2p')$, le temps de retour sera le plus petit commun multiple :

– du plus petit q tel que $2^q - 1$ est divisible par $2p - 1$

– et du plus petit q' tel que $2^{q'} - 1$ est divisible par $2p' - 1$.

C'est peut-être compliqué, mais nous n'y pouvons rien ; tout ne se simplifie pas toujours en mathématiques.

Exemple. Pour une image de taille 10×12 , le temps de retour sera donc le plus petit commun multiple de 6 et de 10 (voir la justification du 6 et du 10 plus haut), c'est-à-dire 30.

LE CALCUL DU TEMPS DE RETOUR

Les longs moments passés à attendre le retour de l'image nous ont conduits à concevoir et à programmer une méthode de calcul de ce temps de retour qui, même lorsqu'il est très grand, aboutit en quelques secondes. Cela permet à notre logiciel