

chacun été agrandis d'un facteur deux. L'image précédente, on le devine alors, est la superposition des 16 seizièmes du texte. Etc. Les temps de retour sont indiqués pour différentes tailles d'images sur la figure 3.

Dans le cas d'un temps de retour très long, ce qui est le cas avec l'image de la Joconde en format 252×212 , les images intermédiaires sont parfois étranges et laissent entrevoir des réminiscences partielles et déformées de l'image initiale (voir la figure 6).

Le retour à l'ordre surprend, car on comprend mal qu'en mélangeant de plus en plus les points d'une image – ce qui en apparence la fractionne en morceaux déformés et battus –, on fasse revenir comme par magie l'image initiale. C'est que, dans les mondes où tout est discret, notre intuition fondée sur le continu nous fait défaut : un parallèle peut être proposé avec la mécanique quantique, où le passage à une conception quantique (la « mise en quanta » est une façon de discrétiser le monde physique) donne aussi une théorie dont bien des aspects contredisent les attentes de l'intuition.

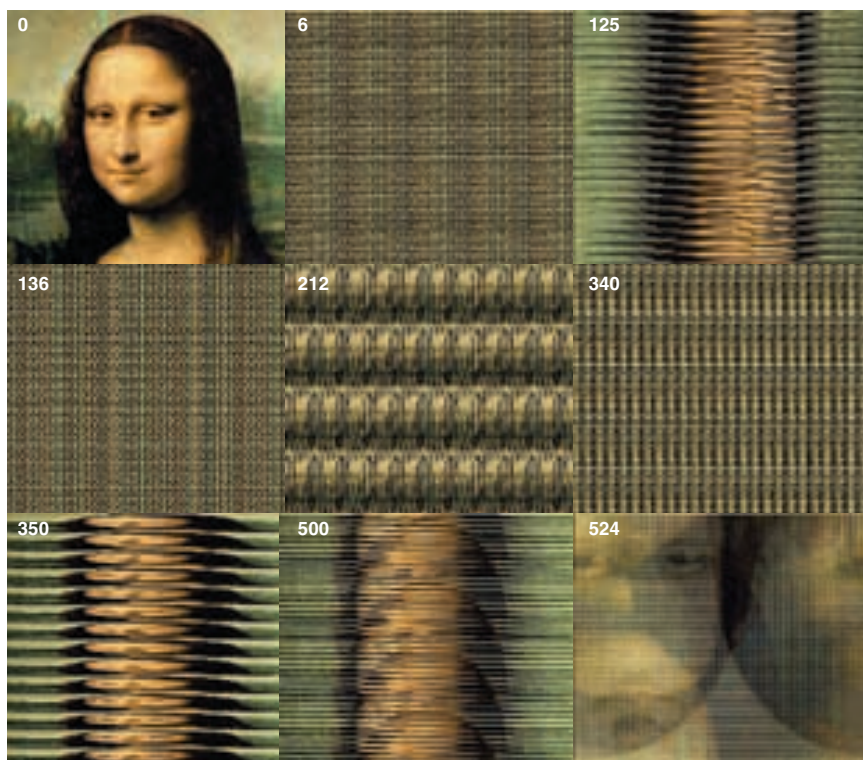
LE CALCUL DU TEMPS DE RETOUR

Contrairement à l'exemple précédent, nous avons réussi pour la transformation du photomaton à calculer le temps de retour.

La méthode qui nous a menés au résultat est indirecte. Lors de nos nombreux essais, nous avons pris les mélanges de cartes classiques et les avons appliqués aux lignes et aux colonnes d'une image. Dans le mélange de cartes le plus simple (appelé séparation binaire), nous faisons deux paquets à partir d'un en plaçant alternativement les cartes à droite et à gauche, puis nous regroupons les deux paquets en un seul, en mettant celui qui contient la première carte au-dessus (cette première carte reste donc à sa place).

Un peu de réflexion vous persuadera que la transformation qui consiste à effectuer simultanément la séparation binaire sur les numéros des colonnes et sur les numéros des lignes est identique à la transformation du photomaton.

Le mélange de cartes inverse de la séparation binaire est le mélange *out-faro* (ou *Pharaon out*) : on insère de façon parfaite les cartes du demi-paquet supérieur dans le demi-paquet inférieur, en s'arrangeant pour que la carte placée en tête y reste (si elle passait en second, il s'agirait de *in-faro*). Ce résultat sur l'inverse de la séparation binaire a été expliqué dans le numéro de *Pour la Science*



6. Transformation du photomaton appliquée à une image de la Joconde. L'image a une taille 252×212 . Le temps de retour est de 1 050 étapes. Certaines images sont totalement illisibles, d'autres laissent apparaître le motif initial découpé et déformé. Les images retenues ont pour numéro : 0 (image initiale), 6, 125, 136, 212, 340, 350, 500, 524. Nous vous invitons à utiliser notre logiciel pour admirer la série complète des 1 050 étapes.

de mars 1997). Le mélange inverse de la transformation photomaton est donc nécessairement le résultat de l'*out-faro* appliqué aux lignes et aux colonnes, c'est-à-dire ce que nous avons observé : une superposition des quatre quarts agrandis de l'image (une petite réflexion supplémentaire vous en persuadera).

Cette compréhension de la nature profonde du photomaton (un mélange binaire simultané sur les colonnes et sur les lignes) nous conduit au temps de retour pour toutes les tailles d'images. Voici le raisonnement :

– D'une part, la période de l'*out-faro* (identique, puisque c'est la transformation inverse à celle du mélange binaire) est connue. Dans le cas particulier où n est égal à 2^i , c'est i . Dans le cas général pour $n = 2p$, le retour est le plus petit entier q tel que : $2^q - 1$ est divisible par $2p - 1$.

Prenons par exemple $p = 5$:

$2^1 - 1 = 1$ n'est pas divisible par 9 ;

$2^2 - 1 = 3$ n'est pas divisible par 9 ;

$2^3 - 1 = 7$ n'est pas divisible par 9 ;

$2^4 - 1 = 15$ n'est pas divisible par 9 ;

$2^5 - 1 = 31$ n'est pas divisible par 9 ;

$2^6 - 1 = 63$ est divisible par 9 ;

donc le temps de retour pour $p = 5$ (paquet de dix cartes) est 6.

Pour $p = 6$: on voit que $2^{10} - 1 = 1\,023$ est divisible par 11 et qu'on n'obtient rien avant. Le temps de retour est 10.

– D'autre part, lorsqu'une transformation opère indépendamment sur les lignes et sur les colonnes, on montre que le temps de retour est le plus petit commun multiple du temps de retour de la transformation des colonnes et du temps de retour de la transformation des lignes.

Pour notre transformation du photomaton, il en résulte que, si le rectangle a pour taille $(2p) \times (2p')$, le temps de retour sera le plus petit commun multiple :

– du plus petit q tel que $2^q - 1$ est divisible par $2p - 1$

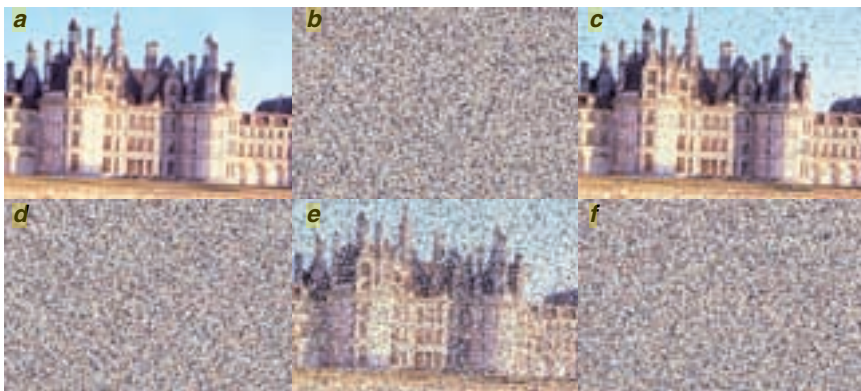
– et du plus petit q' tel que $2^{q'} - 1$ est divisible par $2p' - 1$.

C'est peut-être compliqué, mais nous n'y pouvons rien ; tout ne se simplifie pas toujours en mathématiques.

Exemple. Pour une image de taille 10×12 , le temps de retour sera donc le plus petit commun multiple de 6 et de 10 (voir la justification du 6 et du 10 plus haut), c'est-à-dire 30.

LE CALCUL DU TEMPS DE RETOUR

Les longs moments passés à attendre le retour de l'image nous ont conduits à concevoir et à programmer une méthode de calcul de ce temps de retour qui, même lorsqu'il est très grand, aboutit en quelques secondes. Cela permet à notre logiciel



7. Les retours approximatifs. La transformation du boulanger pour une image de taille 240×160 . Les cycles ont respectivement les longueurs 1, 4, 29, 64, 156, 157, 274, 2183, 22458, 13 074. Ces nombres ont pour plus petit commun multiple 27 720 023 335 722 958 656 qui est le temps de retour (plutôt long!). À l'étape 40 000 000 images (b), tout est brouillé. De même, aux étapes 50 000 000 (d) et 100 000 000 (f). À l'étape 48 935 982 (qui est le ppcm de 13 074, 22 458, 4) les 35537 pixels (c) correspondant aux cycles de longueur 13074, 22458, 4 et 1 sont en bonne place. Cela représente une part importante des 38 400 points de l'image, que l'on reconnaît donc. À l'étape 98 455 872 (ppcm de 22 458, 274, 64, 4) à nouveau un nombre important (22 801) de points est en bonne place (e).

de vous annoncer que, par exemple, l'image initiale sera de retour dans 10 ans 3 mois 5 jours 4 heures et 35 minutes.

Voici le principe de ce calcul qu'il est intéressant de détailler, puisqu'il fait comprendre le retour miraculeux à l'image de départ.

Lorsqu'on applique une transformation bijective, chaque point suit un cycle : par exemple, le point de coordonnées (0,0) va en (1,5) et le point de coordonnées (1,5) va en (3,7), le point de coordonnées (3,7) revient en (0,0) : (0,0) est revenu à sa place au bout de trois applications de la transformation. L'appartenance à un cycle (ici de longueur trois) est la règle générale : chaque point appartient ainsi à un cycle et un seul, dont la longueur bien sûr peut être n'importe quel nombre entier de taille inférieure au nombre de points de l'image. Aussi l'ensemble des points de l'image peut être décomposé en une liste de cycles : par exemple, l'un de longueur 3, un autre de longueur 6, un autre de longueur 15.

Il est clair que chaque point d'un cycle revient à sa place pour les images dont le numéro est un multiple de sa longueur ; donc l'image revient exactement identique à elle-même si son numéro est simultanément un multiple de toutes les longueurs des cycles, autrement dit, si c'est un multiple du plus petit commun multiple des longueurs des cycles. Le plus petit commun multiple de 3, 6 et 15 est 30, donc, avec notre exemple, le temps de retour est 30.

Connaître le temps de retour peut donc s'obtenir simplement en décomposant l'image en cycles et en calculant le plus petit commun multiple de la lon-

gueur des cycles trouvés : même si le temps de retour est de mille milliards, quelques secondes permettent alors de le savoir (ah, les merveilles du raisonnement mathématique!).

Mieux, grâce à la décomposition en cycles de la transformation, vous pouvez, en quelques secondes, connaître l'image numéro 1001 (ou n'importe quel autre nombre aussi grand soit-il) sans avoir à calculer les images précédentes. Expliquons cette idée, en supposant que les cycles sont, comme précédemment, de longueur 2, 6 et 15.

Vous calculez le reste de la division de 1001 par 2, c'est 1, et, pour chaque point de l'image appartenant à un cycle d'ordre 2, vous appliquez donc une fois la transformation.

Vous calculez le reste de la division de 1001 par 6, c'est 5 (car $1001 = 166 \times 6 + 5$) et donc, pour chaque point des cycles d'ordre 6, vous appliquez cinq fois la transformation à ces points.

Vous divisez 1001 par 15, ce qui donne un reste de 11. Pour les points appartenant aux cycles de longueur 15, vous appliquez donc 11 fois la transformation. Au total, vous n'avez que très peu appliqué la transformation (et à chaque fois en quelques points), pourtant vous connaissez maintenant la position de chacun des points après 1001 applications de la transformation.

Dans le cas général, l'utilisation de cette idée demande une bonne organisation du calcul et le stockage des cycles en mémoire. Mais, pour aller directement à une image lointaine, la procédure est incomparablement plus rapide que la méthode naturelle consistant à appliquer autant de fois qu'il le faut la transformation à chaque point de l'image.

LE FLOU EXPLIQUÉ

Cette décomposition en cycles nous permet aussi de comprendre pourquoi l'image revient proche de l'image initiale pour certaines valeurs du numéro d'image. En effet, imaginons que le temps de retour soit très long et de la forme $2m$. Supposons que l'on s'arrête à l'image numéro m . Tout cycle possède une longueur qui est un diviseur de $2m$ (car, d'après ce que l'on a vu, le temps de retour est un multiple de la longueur de chaque cycle) ; s'il y a des cycles d'ordre impair, leur longueur divise donc m , et donc leurs points sont bien en place dans l'image numéro m . Dès que suffisamment de points sont en place, le contenu de l'image nous apparaît superposé à une sorte de bruit qui ne nous empêche pas de voir l'image.

La figure 7 représente des images dont les numéros assurent ainsi que de nombreux points sont à la bonne place : les images obtenues sont des retours approximatifs à l'image de départ. On comprend alors qu'il n'y a pas à s'étonner, lors de l'application répétée d'une transformation bijective, de retrouver ces réminiscences partielles que nous avons remarquées dans la figure 6. L'explication de leurs déformations est de même nature.

Grâce à l'arithmétique des cycles, les fascinantes bizarreries des transformations bijectives de points deviennent un peu moins mystérieuses. Cela n'enlève rien à leurs charmes, que nous vous invitons à explorer en visitant notre site et en utilisant le logiciel que nous avons conçu pour cela.

Jean-Paul DELAHAYE est directeur adjoint du Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille du CNRS. Philippe Mathieu est professeur d'informatique au LIFL.

e-mail : delahaye@lifl.fr

Adresse internet pour d'autres images et le logiciel gratuit :

<http://www.lifl.fr/~mathieu/transform>

J.-P. DELAHAYE, *Le mélange des cartes*, in *Pour La Science*, mars 1997.

R.L. DEVANEY, *Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1988.

H.-O. PEITGEN, H. JÜRGENS et D. SAUPE, *Chaos and Fractals*, New Frontiers of Science, Springer-Verlag, pp. 536-548, 1992.

I. PRIGOGINE et I. STENGERS, *La nouvelle alliance*, Gallimard, chapitre 9, 1979.