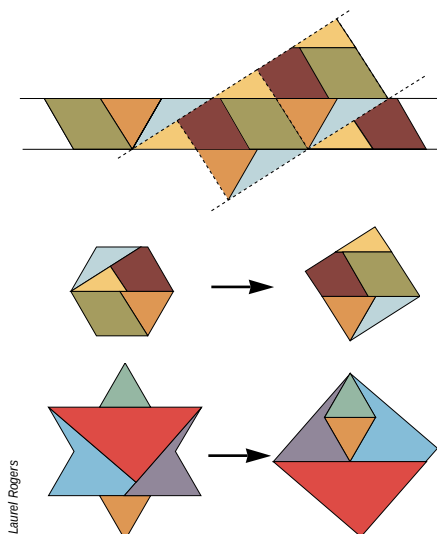




Laurel Rogers

4. Des bandes infinies pavées par des formes différentes nous inspirent de possibles dissections ; en haut, un hexagone en un carré. Une étoile de David est, similairement, dissemblée en carré (en bas).

nuages de poussières sphériques infiniment compliqués qu'à des formes juxtaposées.

Il n'y a, faut-il le dire, aucune possibilité pratique de réaliser cette dissection sur une sphère réelle – les trafiquants en métaux précieux peuvent soupirer de soulagement –, mais la dissection démontre combien le concept de volume est subtil. Tarski a démontré en 1935 qu'il n'existe pas de dissections « paradoxales » modifiant les aires des surfaces, quelle que soit la complexité des parties découpées – mais il en existe, cependant, à la surface d'une sphère.

Lorsque les parties issues du découpage de l'objet ont des aires, ou des volumes, bien définis, il n'y a pas de construction contraire à l'intuition. En 1833, un lieutenant de l'armée prussienne, P. Gerwein, résolut le problème essentiel des dissections posé par le mathématicien hongrois Farkas Wolfgang Bolyai. Gerwein prouva que, étant donné deux polygones plans d'aires

égales, on peut découper l'un en un nombre fini de pièces polygonales qui peuvent être assemblées pour former l'autre. Ce résultat est dénommé théorème de Bolyai-Gerwein, bien qu'un certain William Wallace l'ait démontré auparavant, en 1807.

Le théorème de Bolyai-Gerwein ne se généralise pas à la dimension trois. En 1900, le mathématicien allemand Hilbert demanda si deux polyèdres d'égal volume étaient toujours « équivalents par dissection », c'est-à-dire pouvaient être la réunion du même ensemble de parties polyédrales. Une année après, le mathématicien Max Dehn, spécialiste de topologie, prouva un surprenant théorème : un cube et un tétraèdre régulier ne sont pas équivalents par dissection polyédrale, répondant par la négative à Hilbert.

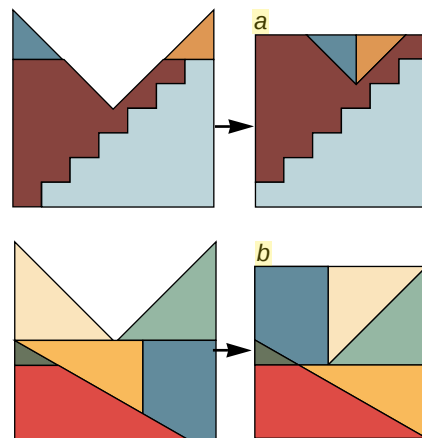
PAVAGES, BANDES ET DISSECTIONS

Des techniques mathématiques apparemment sans relation avec les dissections vous aident dans les recherches. Vous pouvez progresser dans ce domaine à l'aide de tâtonnements inspirés, mais seulement si vous avez une excellente imagination spatiale. Une des vertus de *Dissections* est qu'il explique nombre de techniques générales utilisées dans leurs recherches.

Une de ces techniques consiste à couper une forme suivant un « escalier », qui peut alors être décalé d'une marche pour créer une forme différente. David Colli-son, un fervent des dissections, conçut des dissections élaborées fondées sur ce principe. Sa dissection du pentagone (voir la figure 5) démontre l'égalité pythagoricienne : $5^2 + 12^2 = 13^2$.

Une autre méthode générale est celle de la mosaïque. Nombre de formes intéressantes peuvent être découpées et réassemblées en formes qui pavent le plan. Si deux mosaïques distinctes, chacune formée de pavés de même aire, sont superposées, il est souvent possible d'y « lire en clair » une dissection d'une des formes dans l'autre. Par exemple, une croix grecque peut de la sorte être « dissemblée » en carré.

Un usage plus élaboré de la même idée de base – la dissection d'un dodécagone en une croix latine – est dû à



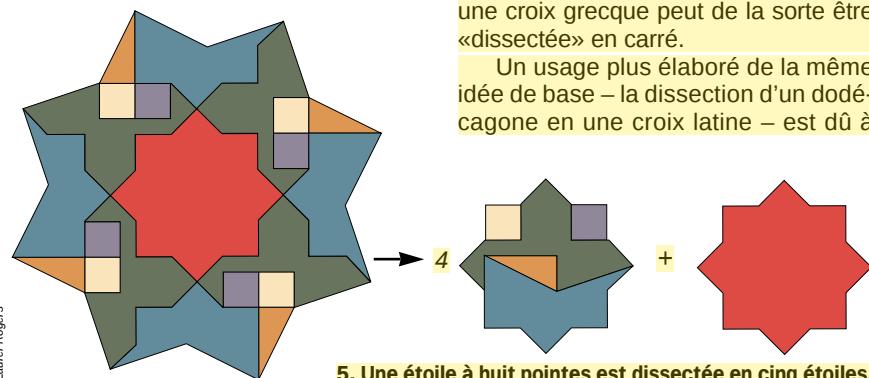
6. Dissection trompeuse : Sam Loyd pensait pouvoir disséquer une mitre en un carré. Malheureusement le carré (a) était un rectangle ! La bonne dissection est représentée en (b).

Harry Lindgren, l'auteur de *Geometric Dissections* (Van Nostrand, 1964). Le premier pas, et le plus difficile, est le découpage du dodécagone et son réarrangement en une forme pavant le plan. La croix latine (de même aire que le dodécagone) peut aussi se réarranger pour paver le plan. La superposition des deux pavages conduit à la dissection désirée.

Une troisième technique est la méthode des bandes. Chaque forme est découpée et réarrangée en pavé qui reproduit une bande infinie. Un recouvrement adéquat des bandes peut alors déterminer une dissection. Celle d'un hexagone en carrée, obtenue par Paul Busschop, provient de cette technique des bandes (Busschop était belge ; solitaire, il écrivit un livre dont son frère assura la publication posthume en 1879). Harry Bradley, un ingénieur américain, découvrit en 1897, alors qu'il était assistant à l'Université, comment disséquer une étoile de David en carré par la même méthode.

Les problèmes de dissection ne se limitent pas à changer une seule forme en une autre. Souvent tout un ensemble de formes doivent être découpées et réassemblées, ou vice versa.

Les dissections vous hypnotisent, et, à l'occasion, l'œil peut vous induire en erreur. En 1901, Loyd commit une bourde mémorable : il affirma pouvoir disséquer un carré privé d'un de ses quarts, une mitre, en un carré. Malheureusement, le « carré » apparent était, en définitive, un rectangle aux côtés proportionnels à 48 et 49. Son grand rival, Dudeney, fut ravi de signaler l'erreur en 1911, et indiqua une dissection correcte, illustrée sur la figure 6. Aussi, si vous voulez découvrir de nouvelles dissections, suivez le conseil prodigué par nombre de parents à leur progéniture : « Amusez-vous bien, mais faites attention. »



Laurel Rogers

5. Une étoile à huit pointes est dissemblée en cinq étoiles.