

Récemment, des physiciens de l'Université de Fribourg ont observé une transition de phase un peu différente, mais non sans rapport. Pour mieux contrôler la température de petits agrégats de sodium, ils les ont étudiés dans de l'hélium gazeux dont ils savaient ajuster la température avec précision. Dans ce mélange d'atomes d'hélium et d'agrégats de sodium, de nombreuses collisions se produisent. Toutefois, l'hélium étant chimiquement inerte, la structure des agrégats n'est pas modifiée, tout au moins à des températures modérées. L'hélium est donc un milieu où un équilibre thermodynamique s'établit.

Les physiciens ont étudié la manière dont les agrégats de sodium d'une taille donnée absorbent la lumière d'un faisceau laser : l'absorption de la lumière en fonction de la fréquence du laser – ce que l'on nomme le spectre d'absorption – renseigne sur l'état physique des particules éclairées. Ils ont observé que le spectre de molécules froides et solides diffère de celui que l'on obtient pour des gouttelettes chaudes et liquides. À une température inférieure à -173°C , le spectre comporte plusieurs pics étroits, ce qui est caractéristique d'une molécule rigide. Aux températures supérieures à 107°C , le spectre possède uniquement deux renflements, dont les maxima se trouvent à des fréquences prévues par la théorie de la «gelée» sans structure.

Pour les agrégats les plus petits, dont la structure interne est importante, on peut calculer rigoureusement, à l'aide de la mécanique quantique, le comportement de tous les électrons de chaque atome. Ces calculs révèlent la structure moléculaire de ces agrégats et expliquent de façon précise leur stabilité. Dans le cas des agrégats plus gros, contenant une

centaine d'atomes ou même davantage, de tels calculs sont excessivement longs, et les physiciens utilisent le modèle de la gelée. Pour les agrégats de plusieurs milliers d'atomes, les physiciens doivent renoncer à la mécanique quantique et employer la théorie simplifiée des orbites périodiques, à moins qu'ils ne s'en remettent à l'information indirecte que donnent les nombres magiques obtenus expérimentalement, à partir de la mesure de la proportion des agrégats produits suivant leur taille (les plus abondants étant les plus stables).

Depuis 1984, les physiciens ont parcouru un long chemin dans la compréhension et l'application des nombres magiques aux agrégats métalliques. Des agrégats icosaédriques de sodium contenant jusqu'à 21 000 atomes ont été fabriqués. Pourtant, la structure cristalline du sodium solide n'est pas l'icosaèdre, car aucun matériau solide ne peut être construit en empilant des icosaèdres : de même que des tuiles pentagonales ne couvrent pas parfaitement un plan, sans vides ni chevauchements, les icosaèdres n'ont pas la symétrie qui permet de remplir entièrement l'espace. Pour cette raison, même les plus gros agrégats de sodium fabriqués à ce jour n'ont pas une organisation de leurs atomes semblable à celle que l'on trouve dans le sodium solide.

Si les physiciens ont obtenu une foule d'informations sur les agrégats métalliques et sur les nombres magiques qui assurent leur stabilité, ils ignorent toujours la réponse à cette question fondamentale : à quel moment et comment la transformation entre un agrégat et un solide massif se produit-elle ? Les agrégats métalliques constituent un étrange arrangement de la matière qui réserve certainement bien des surprises.

Matthias BRACK est professeur de physique théorique à l'Université de Ratisbonne, en Allemagne.

Pierre JOYES, *Les agrégats inorganiques élémentaires*, éditions de physique, 1990.

Sven BJØRNHOLM, *Clusters, Condensed Matter in Embryonic Form*, in *Contemporary Physics*, vol. 31, n° 5, pp. 309-324, septembre 1990.

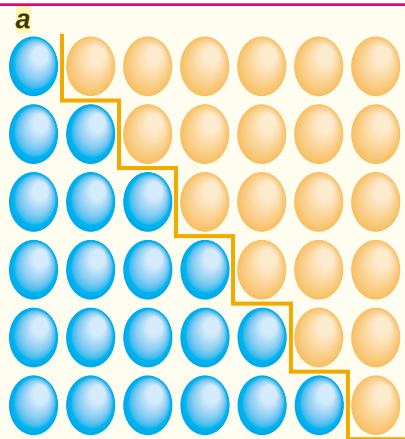
M.L. COHEN et W.D. KNIGHT, *The Physics of Metal Clusters*, in *Physics Today*,

vol. 43, n° 12, pp. 42-50, décembre 1990.

Walt A. de HEER, *The Physics of Simple Metal Clusters : Experimental Aspects and Simple Models*, in *Reviews of Modern Physics*, vol. 65, n° 3, 1^{ère} partie, pp. 611-676, juillet 1993.

Matthias BRACK, *Self-Consistent Helium Model and Semiclassical Approaches*, in *Reviews of Modern Physics*, vol. 65, n° 3, 1^{ère} partie, pp. 677-732, juillet 1993.

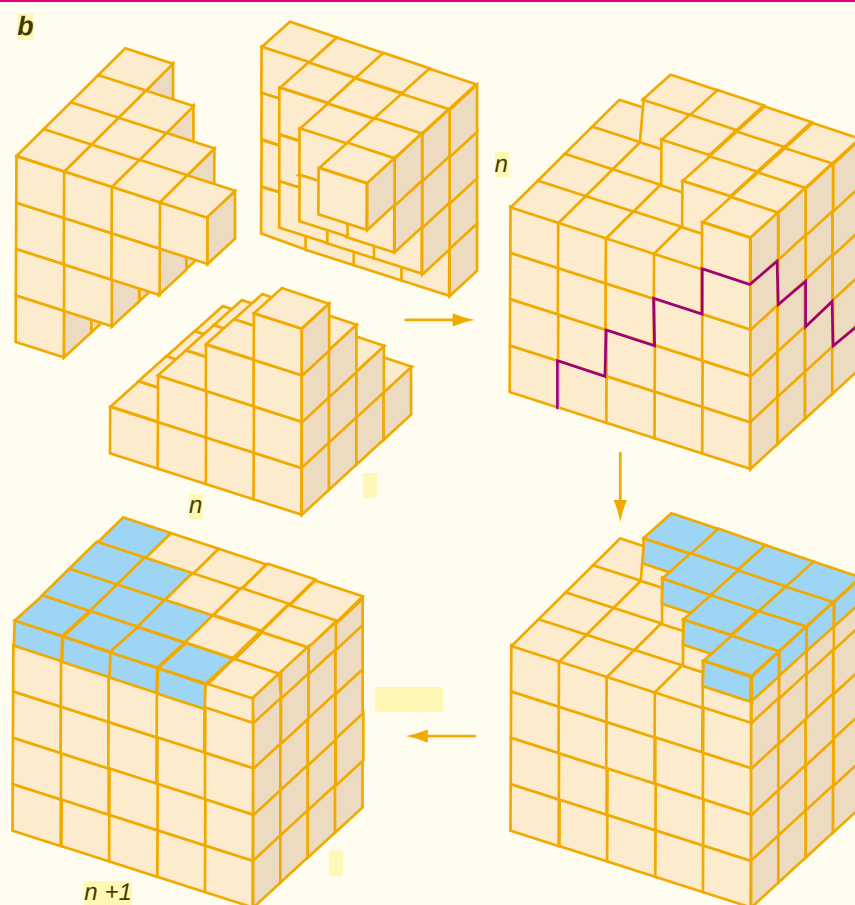
T.P. MARTIN, *Shells of Atoms*, in *Physics Reports*, vol. 273, n° 4, pp. 199-242, août 1996.



Les preuves sans mots

JEAN-PAUL DELAHAYE

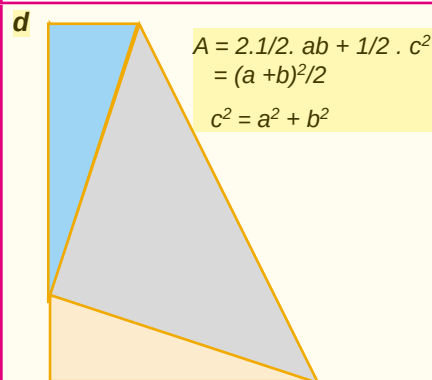
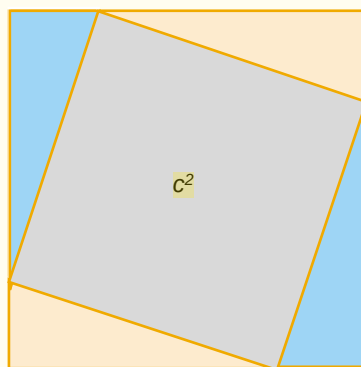
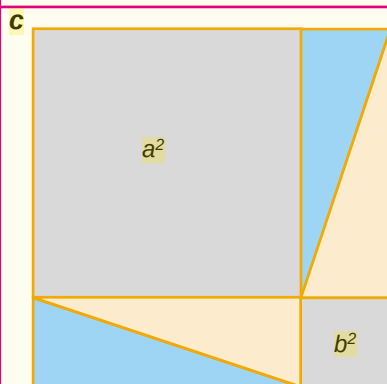
En mathématiques, un petit dessin vaut-il mieux qu'un long discours ?



Il y a quelques années, il était bien vu de mettre le moins possible de dessins dans un livre de géométrie. On trouve encore en vente des ouvrages de géométrie dont certains chapitres ne comportent absolument aucune figure : j'en ai un chez moi, paru en 1967, dont le chapitre sur les barycentres ne contient aucun triangle, aucun segment, ni aucune illustration d'aucune sorte !

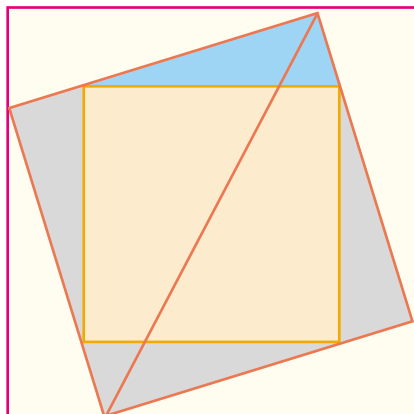
Le grand traité de mathématiques de Nicolas Bourbaki ne possède pas de tome consacré exclusivement à la géométrie, mais inclut quand même un livre d'algèbre de plus de 500 pages qui traite de droites, de plans, d'espaces, de parallèles, de parallélogrammes, de symétries, d'homothéties, de projections, de quadrilatères, du théorème fondamental de la géométrie projective, du théorème de Pappus, du théorème de Desargues, etc. Pas une figure !

L'idée derrière ce qui semble de navrantes aberrations est qu'une figure ne prouve rien et qu'au contraire, il faut s'en méfier, car elle n'est jamais *quelconque* : quand vous dessinez un triangle, il possède peut-être une caractéristique particulière qui vous donne l'illusion d'un résultat général erroné. Le raisonnement, même quand il concerne des

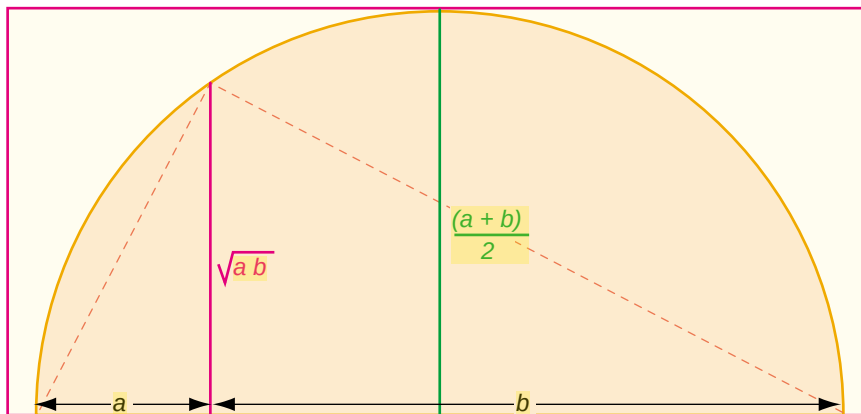


1. (a) : Preuve de $1 + 2 + 3 + \dots + n = n(n+1)/2$. (b) : Preuve de $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = 1/3[n(n+1)(n+1/2)]$. Preuve due à Man-Keung Siu (1984). (c) et (d) : deux démonstrations du théorème de

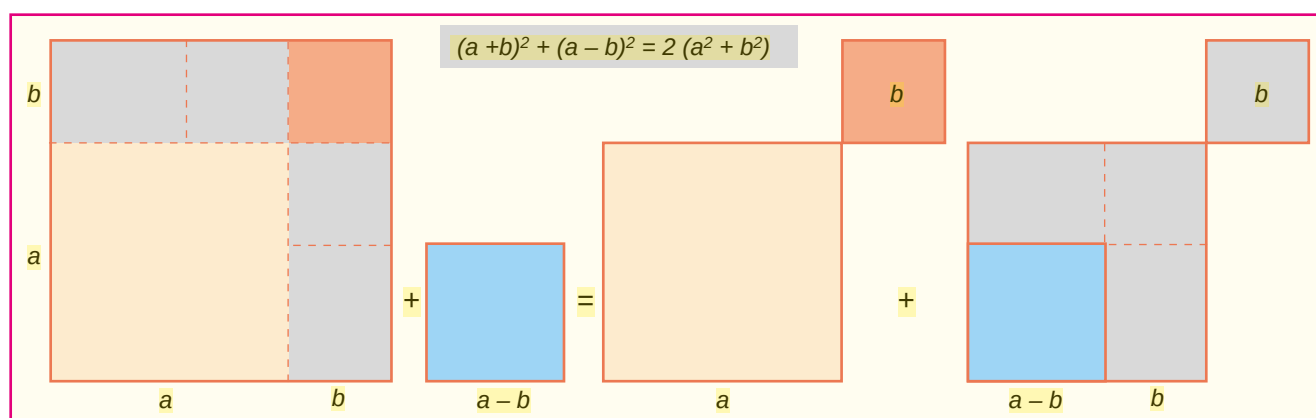
Pythagore. La première est due à un auteur inconnu qui vivait en Chine, vers -200 avant J.-C. La seconde est l'œuvre du vingtième président des États-Unis, James Garfield.



2. La bissectrice de l'angle droit d'un triangle rectangle coupe le carré construit sur l'hypoténuse en deux moitiés (R. Eddy, 1991).



3. La moyenne géométrique de deux nombres a et b , soit $\sqrt{ab}$, est toujours inférieure à la moyenne arithmétique de ces deux nombres, $(a+b)/2$. Cette preuve est due à Charles D. Gallant (1977).



4. Une identité algébrique peut se voir. En voici un exemple dû à Shirley Wakin (1984).

objets géométriques, ne doit pas s'appuyer sur ce qu'on voit : en mathématiques, méfions-nous des sens !

Plusieurs raisonnements géométriques apparemment irréprochables conduisent à des paradoxes. L'erreur provient le plus souvent de la figure dont on s'aide pour le raisonnement, qui est imperceptiblement trompeuse et nous conduit dans un piège. L'un de ces raisonnements établit que « tout triangle est isocèle » (voir la figure 5). Il fut inventé par Lewis Carroll, qui le présenta dans son ouvrage *The Lewis Carroll Picture Book* (1899).

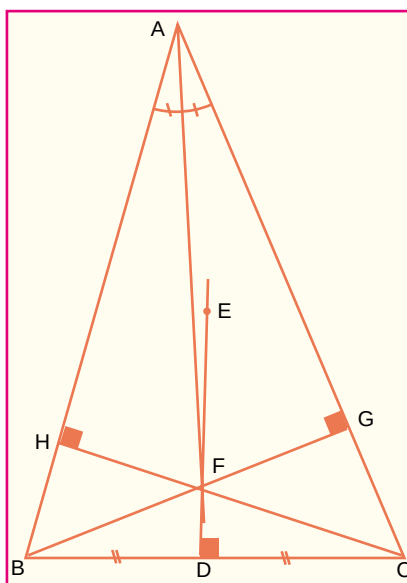
Après avoir constaté les ravages produits par la conception de la géométrie sans figure sur les jeunes esprits que cette forme d'intégrisme dégoûtait des mathématiques, on accepte plus facilement d'illustrer une démonstration par un dessin qui en facilite l'assimilation, même si l'on en connaît les risques.

DÉMONSTRATIONS PAR LES FIGURES

À l'exact opposé des démonstrations géométriques sans figure, un jeu étrange et subtil s'est développé aux

États-Unis : celui des *démonstrations sans mots*. Encouragé par plusieurs revues mathématiques destinées aux enseignants, il a conduit à de remarquables preuves sans un seul mot, qu'un livre de Roger Nelsen a collec-

tées et que nous recommandons à tous ceux que les dessins de cet article auront stimulés (le livre est en anglais, mais, vu son objet, même s'il était en moldave méridional ou en malais primitif, je n'hésiterais pas à le conseiller).



5. ABC est un triangle quelconque. Traçons la perpendiculaire au milieu D de BC, soit E un point de cette perpendiculaire. Considérons la bissectrice de l'angle A. Si DE et cette bissectrice ne se rencontrent pas, cette bissectrice est orthogonale à BC, et donc le triangle est isocèle. Si DE et cette bissectrice se rencontrent en un point F, traçons FB et FC, puis la perpendiculaire FH à AB passant par F, et enfin la perpendiculaire FG à AC passant par F. Les triangles AFG et AFH sont égaux, car ils ont un côté commun et deux angles égaux. Donc AH=AG et FH=FG. Les triangles BDF et CDF sont aussi égaux (car BD=DC, DF commun et les angles en D égaux) et donc FB=FC. De même encore, les triangles FGC et FHB sont égaux (deux côtés et un angle égaux), donc HB=GC, et donc (en utilisant que HA=GA) on en déduit que AB=AC, c'est-à-dire que le triangle ABC est isocèle (l'erreur provient de ce que, si on construit F soigneusement, il se trouve toujours à l'extérieur du triangle ABC, ce qui interdit la suite du raisonnement).