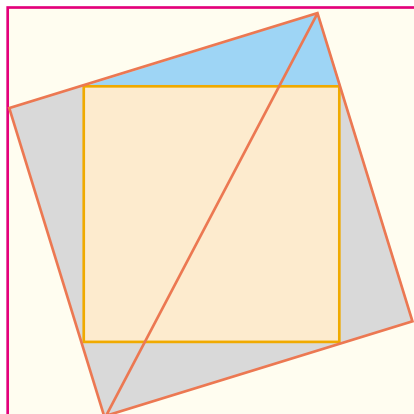
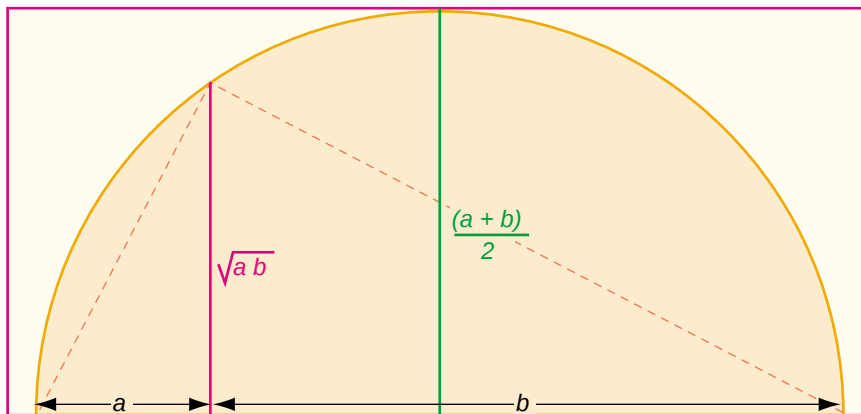
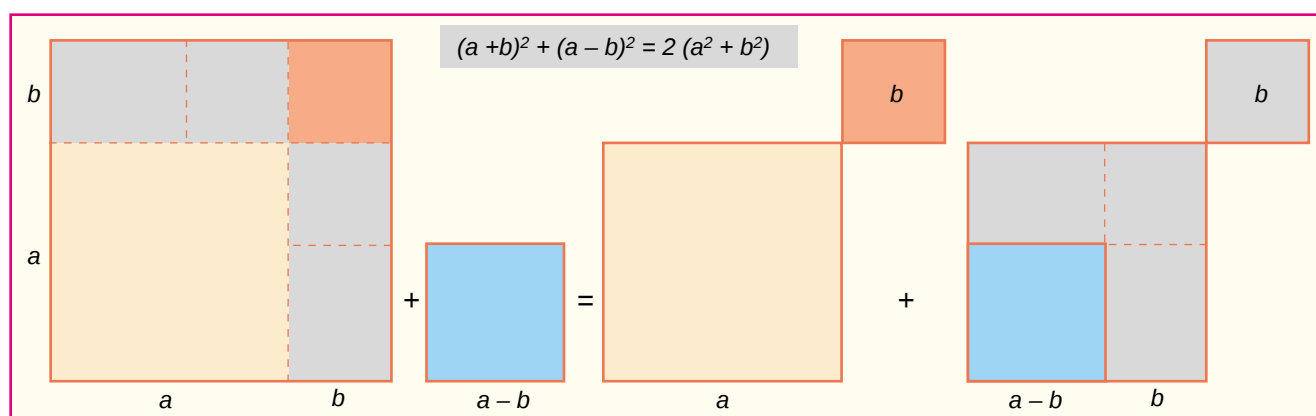




2. La bissectrice de l'angle droit d'un triangle rectangle coupe le carré construit sur l'hypoténuse en deux moitiés (R. Eddy, 1991).



3. La moyenne géométrique de deux nombres a et b , soit $\sqrt{ab}$, est toujours inférieure à la moyenne arithmétique de ces deux nombres, $(a + b)/2$. Cette preuve est due à Charles D. Gallant (1977).



4. Une identité algébrique peut se voir. En voici un exemple dû à Shirley Wakin (1984).

objets géométriques, ne doit pas s'appuyer sur ce qu'on voit : en mathématiques, méfions-nous des sens !

Plusieurs raisonnements géométriques apparemment irréprochables conduisent à des paradoxes. L'erreur provient le plus souvent de la figure dont on s'aide pour le raisonnement, qui est imperceptiblement trompeuse et nous conduit dans un piège. L'un de ces raisonnements établit que « tout triangle est isocèle » (voir la figure 5). Il fut inventé par Lewis Carroll, qui le présenta dans son ouvrage *The Lewis Carroll Picture Book* (1899).

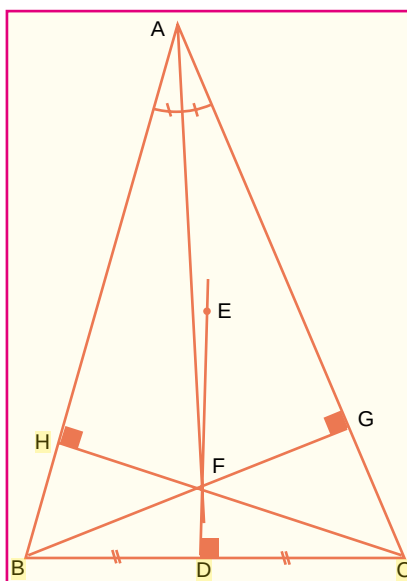
Après avoir constaté les ravages produits par la conception de la géométrie sans figure sur les jeunes esprits que cette forme d'intégrisme dégoûtait des mathématiques, on accepte plus facilement d'illustrer une démonstration par un dessin qui en facilite l'assimilation, même si l'on en connaît les risques.

DÉMONSTRATIONS PAR LES FIGURES

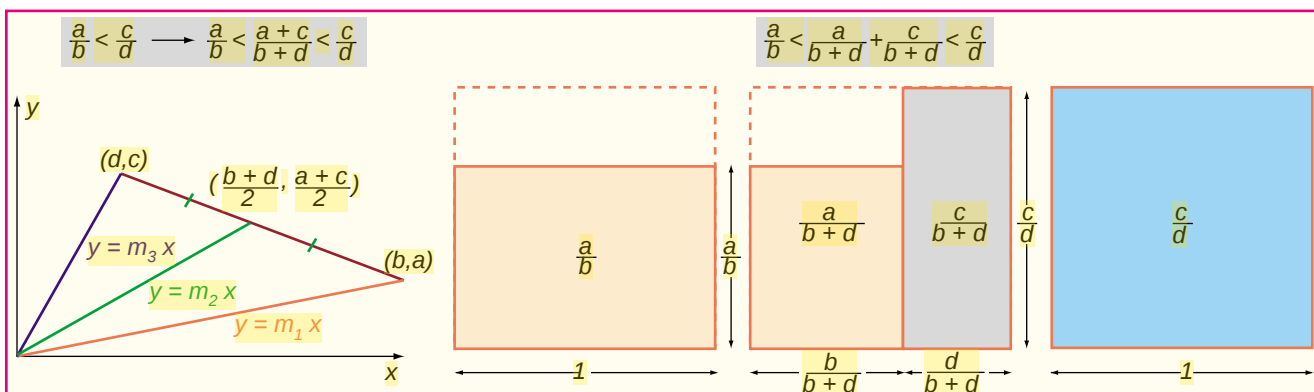
À l'exact opposé des démonstrations géométriques sans figure, un jeu étrange et subtil s'est développé aux

États-Unis : celui des *démonstrations sans mots*. Encouragé par plusieurs revues mathématiques destinées aux enseignants, il a conduit à de remarquables preuves sans un seul mot, qu'un livre de Roger Nelsen a collec-

tées et que nous recommandons à tous ceux que les dessins de cet article auront stimulés (le livre est en anglais, mais, vu son objet, même s'il était en moldave méridional ou en malais primitif, je n'hésiterais pas à le conseiller).



5. ABC est un triangle quelconque. Traçons la perpendiculaire au milieu D de BC, soit E un point de cette perpendiculaire. Considérons la bissectrice de l'angle A. Si DE et cette bissectrice ne se rencontrent pas, cette bissectrice est orthogonale à BC, et donc le triangle est isocèle. Si DE et cette bissectrice se rencontrent en un point F, traçons FB et FC, puis la perpendiculaire FH à AB passant par F, et enfin la perpendiculaire FG à AC passant par F. Les triangles AFG et AFH sont égaux, car ils ont un côté commun et deux angles égaux. Donc AH=AG et FH=FG. Les triangles BDF et CDF sont aussi égaux (car BD=DC, DF commun et les angles en D égaux) et donc FB=FC. De même encore, les triangles FGC et FHB sont égaux (deux côtés et un angle égaux), donc HB=GC, et donc (en utilisant que HA=GA) on en déduit que AB=AC, c'est-à-dire que le triangle ABC est isocèle (l'erreur provient de ce que, si on construit F soigneusement, il se trouve toujours à l'extérieur du triangle ABC, ce qui interdit la suite du raisonnement).



6. La règle des nombres moyens de Nicolas Chuquet datant de 1484. Deux preuves sans mots, la première (à gauche) de Li Changming (1988), la seconde (à droite) de Roger Nelsen (1993).

Le jeu des *démonstrations sans mots* consiste à concevoir des figures – accompagnées éventuellement de quelques équations – suffisamment bien conçues pour qu'en les regardant on se trouve persuadé de résultats mathématiques qui, sans la figure, ne sont pas évidents, ou même sont difficiles. Bien sûr, l'observateur doit connaître un minimum de résultats élémentaires : cas d'égalités des triangles, formule de la surface d'un carré, d'un triangle, d'un rectangle, etc.

Toutes les preuves sans mots ne sont néanmoins pas évidentes. Parfois il faut regarder et réfléchir longuement sur les figures pour comprendre pourquoi elles constituent une preuve du résultat annoncé. Parfois même on n'y arrivera pas : nul ne prétend que les mathématiques puissent être totalement évidentes. Le plaisir qu'on éprouve à saisir une démonstration graphique est

si délicieux que l'on en redemande aussitôt. Les exemples de cette rubrique seront bien sûr insuffisants pour étancher votre soif. Ils nous serviront à réfléchir à ce qu'est une preuve mathématique.

PREUVES PARLANTES ET PREUVES MUTES

Les exemples les plus simples de preuve sans mots concernent la formule :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = n(n+1)/2$$

La figure 1a en indique une qui était connue dans la Grèce antique.

Pourtant, si on voulait écrire une «démonstration complète et rigoureuse», au sens que donne à cette expression un mathématicien contemporain, il faudrait utiliser un raisonnement par récurrence.

La formule est vraie pour $n = 0$. Supposons qu'elle est vraie pour m et étudions le cas $m + 1$:

$$1 + 2 + \dots + m + (m+1) = m(m+1)/2 + (m+1),$$

(par utilisation de l'hypothèse que la formule est vraie pour m)

$$= (m+1)(m/2 + 1)$$

(en factorisant $(m+1)$)

$$= (m+1)(m+2)/2,$$

(en réduisant au même dénominateur la seconde parenthèse).

L'égalité obtenue en prenant le premier et le dernier éléments de cette suite d'égalités est la formule cherchée pour $m+1$. Donc la formule est vraie pour tout entier.

Le principe du *raisonnement par récurrence* est : «Si une propriété P est vraie pour 0, et que l'on a l'implication $\{P \text{ vrai pour } m\} \Rightarrow \{P \text{ vrai pour } m+1\}$, alors P est vraie pour tout entier.»

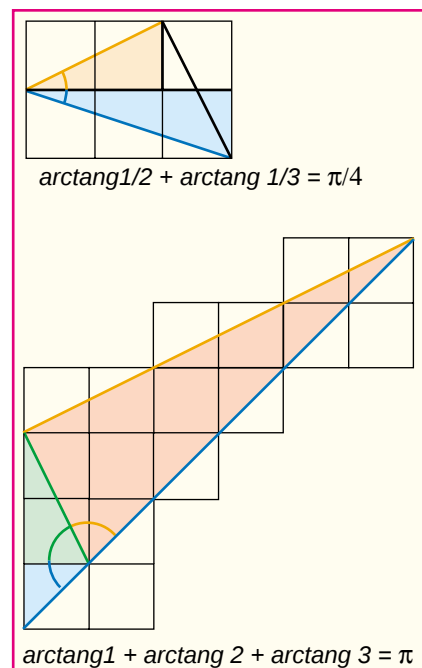
La démonstration rigoureuse est plus longue et surtout moins claire. La démonstration visuelle nous donne le sentiment de mieux saisir ce qui se passe. Le raisonnement par récurrence laisse sur sa faim : il *démontre* le résultat, il ne le *montre* pas.

NE RÊVONS PAS TROP

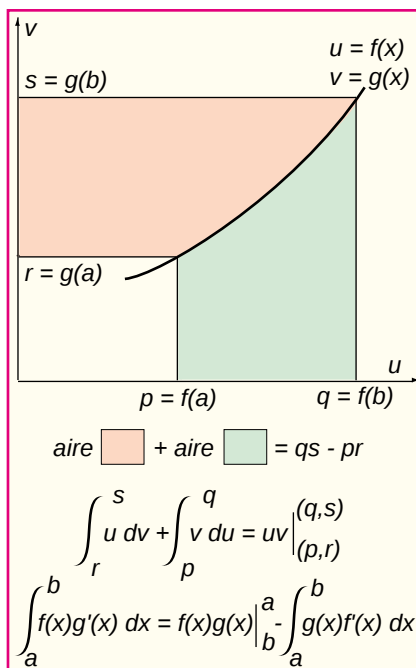
Il serait cependant trop simple de condamner le raisonnement par récurrence et les preuves habituelles des mathématiciens. Même si l'on éprouve une joie intense à observer et à réfléchir sur des *preuves sans mots*, il faut défendre les *preuves avec mots* et, pour commencer, la preuve par récurrence présentée au-dessus.

Son premier avantage est que, pour une multitude de formules analogues, elle marche mécaniquement. On savait, avant de commencer à l'écrire, qu'on allait aboutir, et l'on sait qu'on pourrait par la même méthode démontrer que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = 1/3 n(n+1)(n+2)$. Il ne semble pas que la magnifique démonstration sans mots de Man-Keung Siu (voir la figure 1a) puisse être produite automatiquement.

Un second avantage des preuves avec mots est qu'elles peuvent être défi-



7. Deux formules d'arctangentes. La première démonstration est très classique, la seconde est due à Edward Harris (1987).



8. Démonstration sans mots de l'intégration par parties due au mathématicien américain Richard Courant (1937).