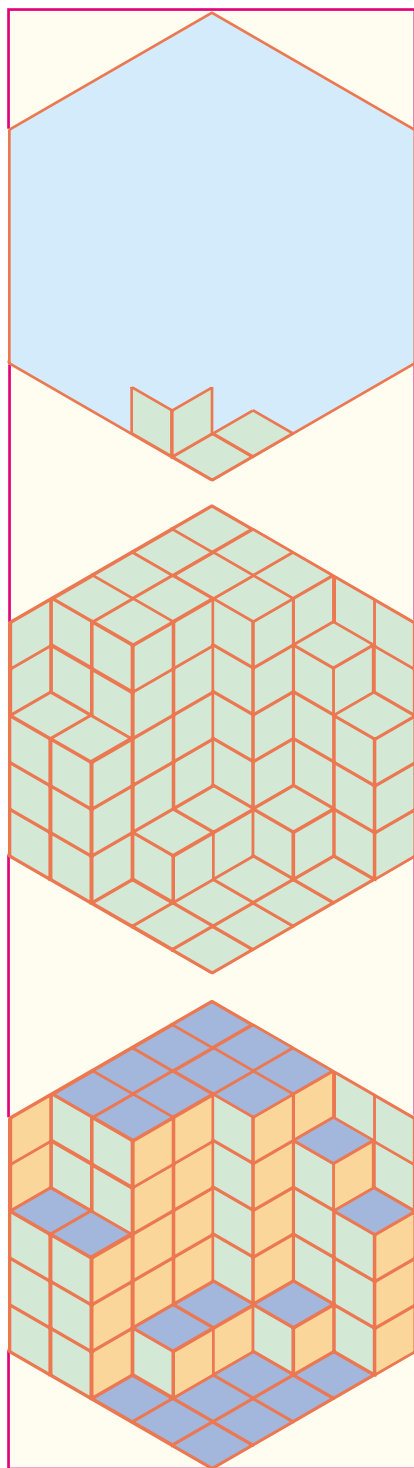




16. Le problème des calissons. Un calisson est un losange obtenu par accolement de deux triangles équilatéraux. Le *Théorème des calissons* stipule que, dans une boîte hexagonale dont le côté est n , lorsqu'on range des calissons de côté 1, il y en a un nombre identique, orientés dans chacune des trois directions possibles. Ici la preuve sans mots (proposée en 1989 par Guy David et Carlos Tomei) est fulgurante : notre vision tridimensionnelle fait tout le travail. N'arrivant pas à me persuader que le dessin constituait ici une véritable preuve du théorème des calissons, j'avoue que, pour me convaincre de son exactitude, je l'ai rétabli par une méthode différente.

cela nécessiterait un travail de plusieurs mois, ou même de plusieurs années.

Au total, les notions de preuves formelles tirées des preuves avec les mots sont bel et bien des outils puissants et généraux que les preuves sans mots ne détrôneront pas.

LE THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

Aussi amusantes qu'elles soient, les preuves sans mots atteignent vite leurs limites et ne doivent donc pas être prises trop au sérieux, comme l'exemple suivant le montre encore.

Le résultat d'analyse appelé *théorème des valeurs intermédiaires* nécessite une démonstration assez compliquée qui ne fut formulée qu'au XIX^e siècle par le mathématicien tchèque Bolzano. En revanche, son sens est perçu sur une figure simple qu'on pourrait voir comme une démonstration sans mots.

Le théorème des valeurs intermédiaires affirme que, si f est une fonction continue (quand on en dessine la courbe il n'y a pas besoin de lever le crayon) définie entre deux valeurs a et b , alors pour toute valeur v entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins un nombre c tel que $f(c) = v$. Graphiquement, cela signifie simplement que, pour tracer un trait sans lever le crayon d'un point sous la droite $y = v$ à un point au-dessus de la droite, vous devez la traverser.

Un dessin en constitue certainement une preuve visuelle, mais, contrairement à la preuve donnée par les mathématiciens aujourd'hui, elle ne fait pas réfléchir à la structure des nombres réels et, en fait, ne montre rien !

La preuve visuelle du théorème des valeurs intermédiaires est trop évidente, et c'est cela sa faiblesse ! En cherchant à comprendre cette évidence, les mathématiciens ont été amenés à approfondir la notion de continuité, puis la structure de l'ensemble des nombres réels, puis finalement tout un domaine mathématique qui constitue la puissante analyse contemporaine sans laquelle bien des questions de physique resteraient énigmatiques. L'évidence graphique est parfois dangereuse : elle incite à la paresse ; c'est en la refusant ou en essayant de la traduire sous une autre forme qu'avance notre compréhension.

TOUT NE PEUT PAS SE DÉMONSTRER VISUELLEMENT

L'habitude que nous avons de vivre dans un espace à trois dimensions et la bonne adaptation de notre cerveau à cette situation nous dotent d'une intuition géomé-

trique qu'il faut utiliser pour faire aimer les mathématiques aux enfants. Cependant notre situation d'objet physique dans un espace physique particulier a aussi ses inconvénients : nous n'arrivons pas à percevoir très clairement ce qu'est une sphère à quatre dimensions ou un espace à une infinité de dimensions, comme les physiciens en ont besoin aujourd'hui. Seule l'approche non géométrique des démonstrations nous conduit dans ces mondes mathématiques.

C'est sans doute à cause de tout cela que la grande époque de la géométrie est passée et qu'en tout cas il serait absurde de remplacer la notion classique de preuve avec des mots par une notion purement géométrique. Même si finalement cela nous désole, le point de vue formaliste (accepter de définir avec précision ce qu'est une preuve avec des mots et tout y ramener) est bien le meilleur et le plus puissant. Tout en lui restant fidèle dans les travaux les plus avancés, il faut refuser de se laisser obnubiler par lui, et il ne faut jamais perdre de vue qu'il n'est que l'aboutissement d'une longue maturation. Les élèves doivent parcourir un chemin dans lequel les preuves sans mots ont un rôle important à jouer, et l'on doit suggérer aux pédagogues de s'y intéresser en France, comme ils l'ont fait aux États-Unis : les preuves sans mots, en ancrant les mathématiques dans un réel immédiat, les rendent sympathiques, font ressentir que ce qu'elles disent est concret et permettent de plus de mémoriser sans mal des résultats à l'aspect rébarbatif.

Jean-Paul DELAHAYE est directeur adjoint du Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille du CNRS.

e-mail : delahaye@lilfl.fr

N. BOURBAKI, *Éléments de mathématique. Algèbre I* (chapitres 1 à 3), Hermann, Paris, 1970.

Roger B. NELSEN, *Proofs Without Words : Exercises in Visual Thinking*, Classroom Resource Materials, n° 1, The American Mathematical Association of America, MAA Service Center, Washington DC, 1993.

H. EVES, *An Introduction to the History of Mathematics*, Sixth Edition, Saunders College Publishing, New York, 1992.

M. GARDNER, *Wheels, Life and other Mathematical Amusements*, W.H. Freeman and Company, New York, 1983, chapitre 6, *Geometrical Fallacies*.

B. d'AMORE, *Paradoxes en géométrie*, Plot n° 58, 1^{er} trimestre 1992, Association régionale de l'APMEP (Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public), Université d'Orléans, pp. 13-18.