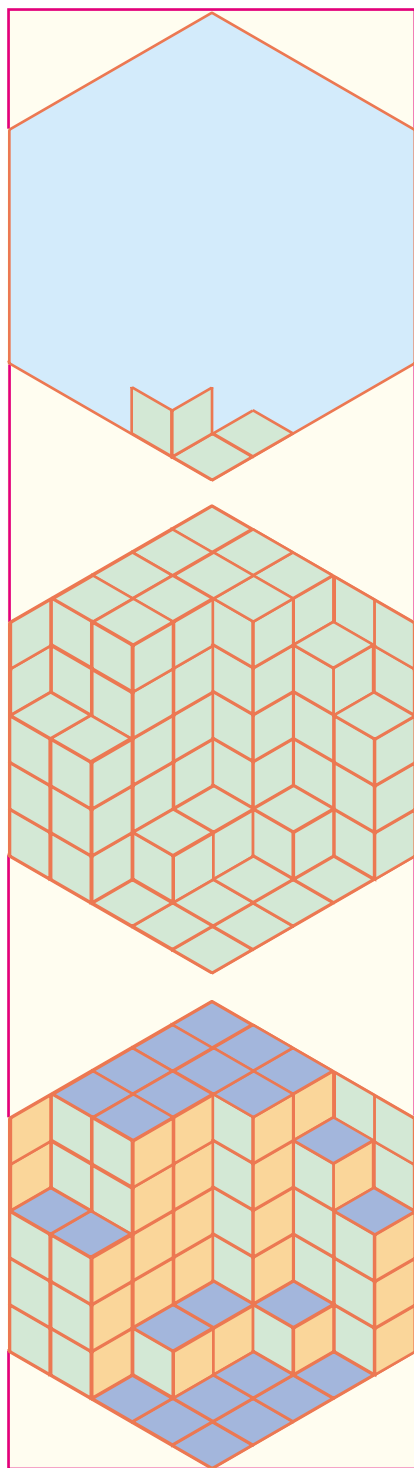




16. Le problème des calissons. Un calisson est un losange obtenu par accolement de deux triangles équilatéraux. Le *Théorème des calissons* stipule que, dans une boîte hexagonale dont le côté est n , lorsqu'on range des calissons de côté 1, il y en a un nombre identique, orientés dans chacune des trois directions possibles. Ici la preuve sans mots (proposée en 1989 par Guy David et Carlos Tomei) est fulgurante : notre vision tridimensionnelle fait tout le travail. N'arrivant pas à me persuader que le dessin constituait ici une véritable preuve du théorème des calissons, j'avoue que, pour me convaincre de son exactitude, je l'ai rétabli par une méthode différente.

cela nécessiterait un travail de plusieurs mois, ou même de plusieurs années.

Au total, les notions de preuves formelles tirées des preuves avec les mots sont bel et bien des outils puissants et généraux que les preuves sans mots ne détrôneront pas.

LE THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

Aussi amusantes qu'elles soient, les preuves sans mots atteignent vite leurs limites et ne doivent donc pas être prises trop au sérieux, comme l'exemple suivant le montre encore.

Le résultat d'analyse appelé *théorème des valeurs intermédiaires* nécessite une démonstration assez compliquée qui ne fut formulée qu'au XIX^e siècle par le mathématicien tchèque Bolzano. En revanche, son sens est perçu sur une figure simple qu'on pourrait voir comme une démonstration sans mots.

Le théorème des valeurs intermédiaires affirme que, si f est une fonction continue (quand on en dessine la courbe il n'y a pas besoin de lever le crayon) définie entre deux valeurs a et b , alors pour toute valeur v entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins un nombre c tel que $f(c) = v$. Graphiquement, cela signifie simplement que, pour tracer un trait sans lever le crayon d'un point sous la droite $y = v$ à un point au-dessus de la droite, vous devez la traverser.

Un dessin en constitue certainement une preuve visuelle, mais, contrairement à la preuve donnée par les mathématiciens aujourd'hui, elle ne fait pas réfléchir à la structure des nombres réels et, en fait, ne montre rien !

La preuve visuelle du théorème des valeurs intermédiaires est trop évidente, et c'est cela sa faiblesse ! En cherchant à comprendre cette évidence, les mathématiciens ont été amenés à approfondir la notion de continuité, puis la structure de l'ensemble des nombres réels, puis finalement tout un domaine mathématique qui constitue la puissante analyse contemporaine sans laquelle bien des questions de physique resteraient énigmatiques. L'évidence graphique est parfois dangereuse : elle incite à la paresse ; c'est en la refusant ou en essayant de la traduire sous une autre forme qu'avance notre compréhension.

TOUT NE PEUT PAS SE DÉMONSTRER VISUELLEMENT

L'habitude que nous avons de vivre dans un espace à trois dimensions et la bonne adaptation de notre cerveau à cette situation nous dotent d'une intuition géomé-

trique qu'il faut utiliser pour faire aimer les mathématiques aux enfants. Cependant notre situation d'objet physique dans un espace physique particulier a aussi ses inconvénients : nous n'arrivons pas à percevoir très clairement ce qu'est une sphère à quatre dimensions ou un espace à une infinité de dimensions, comme les physiciens en ont besoin aujourd'hui. Seule l'approche non géométrique des démonstrations nous conduit dans ces mondes mathématiques.

C'est sans doute à cause de tout cela que la grande époque de la géométrie est passée et qu'en tout cas il serait absurde de remplacer la notion classique de preuve avec des mots par une notion purement géométrique. Même si finalement cela nous désole, le point de vue formaliste (accepter de définir avec précision ce qu'est une preuve avec des mots et tout y ramener) est bien le meilleur et le plus puissant. Tout en lui restant fidèle dans les travaux les plus avancés, il faut refuser de se laisser obnubiler par lui, et il ne faut jamais perdre de vue qu'il n'est que l'aboutissement d'une longue maturation. Les élèves doivent parcourir un chemin dans lequel les preuves sans mots ont un rôle important à jouer, et l'on doit suggérer aux pédagogues de s'y intéresser en France, comme ils l'ont fait aux États-Unis : les preuves sans mots, en ancrant les mathématiques dans un réel immédiat, les rendent sympathiques, font ressentir que ce qu'elles disent est concret et permettent de plus de mémoriser sans mal des résultats à l'aspect rébarbatif.

Jean-Paul DELAHAYE est directeur adjoint du Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille du CNRS.

e-mail : delahaye@lilfl.fr

N. BOURBAKI, *Éléments de mathématique. Algèbre I* (chapitres 1 à 3), Hermann, Paris, 1970.

Roger B. NELSEN, *Proofs Without Words : Exercises in Visual Thinking*, Classroom Resource Materials, n° 1, The American Mathematical Association of America, MAA Service Center, Washington DC, 1993.

H. EVES, *An Introduction to the History of Mathematics*, Sixth Edition, Saunders College Publishing, New York, 1992.

M. GARDNER, *Wheels, Life and other Mathematical Amusements*, W.H. Freeman and Company, New York, 1983, chapitre 6, *Geometrical Fallacies*.

B. d'AMORE, *Paradoxes en géométrie*, Plot n° 58, 1^{er} trimestre 1992, Association régionale de l'APMEP (Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public), Université d'Orléans, pp. 13-18.



Bateau à savon

MARTIN SHANAHAN

Son mouvement démontre l'effet des forces de surface.

Les physiciens qui s'intéressent aux surfaces explorent depuis quelques années les phénomènes de mécano-chimie que l'on observe quand on pose une gouttelette de liquide sur une surface horizontale, par exemple. Habituellement la goutte s'étale plus ou moins, selon que le substrat est «mouillable» ou non, puis elle s'immobilise ; en revanche, quand le liquide réagit avec le solide sur lequel il est posé, rendant ce dernier moins mouillable après contact, une dissymétrie déplace la goutte vers les parties qui n'ont pas réagi et restent donc plus mouillables. La goutte continue de filer sur le substrat tant qu'il reste des zones non parcourues.

Les phénomènes de ce type, qui semblent avoir lieu dans diverses réactions biologiques (opération des muscles, fonctionnement des capillaires dans les plantes), ont été identifiés il y a peu, mais un de leurs avatars est bien connu des amateurs d'expériences et des enfants qui jouent avec de l'eau : du camphre ou, plus simplement, du

savon, propulsent de petits bateaux. Dans ce cas, l'énergie provient de la tension superficielle de l'eau, modifiée par le savon ou par le camphre.

Pour faire l'expérience, je vous conseille de tailler un petit bateau dans du bois ou dans une feuille de plastique d'emballage, plate et rigide, telles celles qui encapsulent les briquets, les fiches électriques et de multiples petits articles ménagers. Découpons la feuille en forme de bateau simple (voir la figure 1), avec une longueur de cinq centimètres et une largeur de un centimètre environ. Ajoutons le «moteur» : sur l'arrière du bateau, nous attachons un petit morceau de pâte à modeler où nous incrustons quelques miettes de savon (le «carburant») ou de camphre (on en trouve en pharmacie).

Dans une baignoire, faisons couler une petite profondeur d'eau (il faudra renouveler l'eau souvent, car sa surface se couvre de «carburant» quand le bateau fonctionne). Attendons que les courants cessent et évitons les courants d'air. Puis posons délicatement le bateau sur la sur-

face de l'eau : presque immédiatement, il se met en mouvement et atteint une vitesse constante de quelques centimètres par seconde. Si on l'a muni d'un gouvernail qui évite les collisions contre les bords, il tourne sans interruption pendant quelques dizaines de minutes.

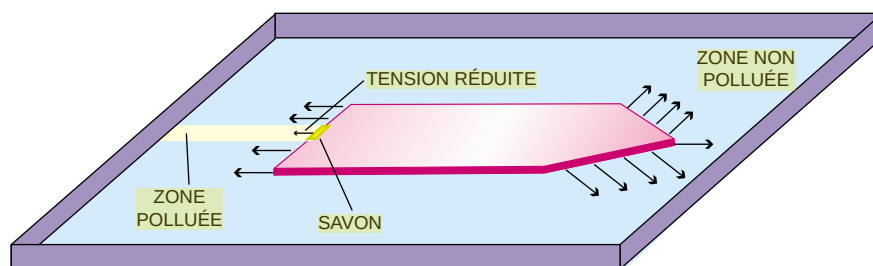
Pourquoi ce mouvement ? Parce que des forces de tension superficielle s'exercent entre l'eau et le bateau. Imaginons une goutte d'eau isolée dans l'espace, sans pesanteur. Les molécules d'eau au centre sont attirées par toutes leurs voisines, dans toute les directions. En revanche, à la surface de la goutte, les molécules ne sont tirées que par les molécules voisines, situées sur les côtés et en dessous ; la force résultante qui les tire vers le centre est la tension superficielle.

Ainsi la surface d'un liquide agit un peu comme si elle était une membrane emprisonnant ce liquide : la tension superficielle permet de remplir une cuillère à café avec de l'eau à un niveau un peu supérieur à son bord (sans la tension superficielle, l'eau qui dépasse de la cuillère s'écoulerait).

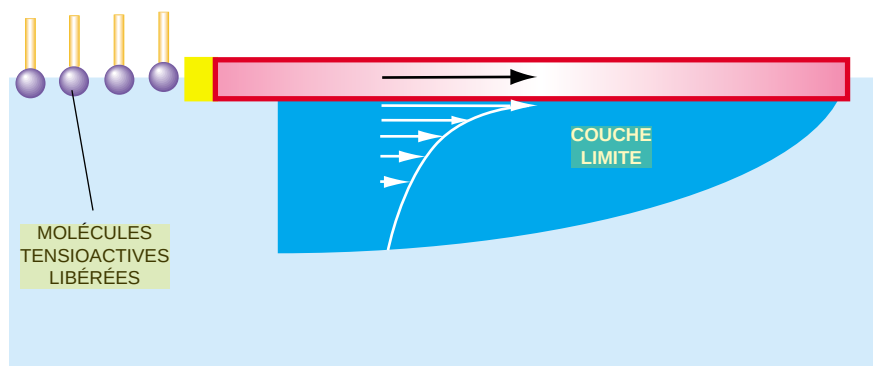
Les mêmes types de forces qui maintiennent solidaires les molécules d'eau sont responsables d'une attraction entre les molécules d'eau et les molécules de matière plastique. La force de traction sur un bord du bateau est égale à la tension superficielle multipliée par la largeur du bord.

Lorsque l'eau est pure, la force qui tire sur la poupe est égale à celle qui s'exerce sur la proue : les deux forces se compensent : le bateau reste immobile. Toutefois le «carburant», savon ou camphre, est «tensioactif» : sa présence réduit localement la tension superficielle de l'eau, de sorte que la force de traction vers l'avant est supérieure à la force de traction vers l'arrière. La force résultante tire le bateau vers l'avant (la vitesse est supérieure lorsqu'on utilise du savon, parce que ce dernier réduit davantage la tension superficielle ; en contrepartie, le bateau tourne plus longtemps avec un moteur à camphre, parce qu'il pollue moins vite la surface de l'eau).

Pourquoi cette force n'engendret-elle pas une accélération constante ?



1. Le bateau à savon est mis en mouvement par un petit morceau de savon, à la poupe.



2. L'écoulement de l'eau sous le bateau : seule une couche limite est entraînée (zone bleu foncé) à une vitesse qui diminue avec la profondeur (flèches blanches).

Calcul de la vitesse d'un bateau à tensioactif

La vitesse de croisière U d'un bateau propulsé par des phénomènes de tension superficielle peut être estimée à partir d'une analyse simple. Devant le bateau, la force propulsive est égale à $\gamma_0 W$, où γ_0 est la tension superficielle de l'eau pure, et W la largeur du bateau. Derrière, la force résistante due à la tension superficielle est égale à la somme de $\gamma_0(W - w)$, pour la partie qui ne comporte pas le moteur (de largeur w), et de γw pour le moteur (où γ est la tension superficielle de l'eau additionnée de produit tensioactif, inférieure à γ_0).

Lorsque la vitesse est constante, la force de propulsion totale, $(\gamma_0 - \gamma)w$, est équilibrée dynamiquement par une force hydrodynamique de freinage. En effet, une mince couche d'eau est entraînée par le fond du bateau. Un cisaillement se produit dans cette couche d'épaisseur d , nommée couche limite. L'épaisseur d augmente avec la distance de la proue, mais, dans les conditions examinées ici, elle reste très mince, ne dépassant guère un millimètre. Les molécules d'eau directement en contact avec le bateau ne glissent pas sur lui et se déplacent à la vitesse U . Le cisaillement dû à la variation de vitesse de l'eau, entre le fond du bateau et la partie inférieure de la couche limite, est responsable de la force de freinage.

L'écoulement est-il régulier ou turbulent? Pour répondre à cette question, les hydrodynamiciens utilisent le nombre de Reynolds, égal à $UL\rho/\eta$, où L est la longueur du bateau, ρ la masse volumique de l'eau et η sa viscosité. Le nombre de Reynolds représente le rapport des forces inertielles du liquide sur les forces visqueuses : il est petit lorsque la viscosité l'emporte, auquel cas l'écoulement n'est pas turbulent ; inversement, lorsqu'il est grand, l'inertie l'emporte sur la viscosité, et l'écoulement devient turbulent. Ici, avec une longueur de cinq centimètres et une vitesse de dix centimètres par seconde, on calcule un nombre de Reynolds égal à 5 000 environ, de sorte que l'écoulement est laminaire. Dans ces conditions, on peut assimiler le bateau à une plaque mince, dont la résistance à l'avancement par unité de largeur, f , est égale à :

$$0,66 (\eta \rho L U^3)^{1/2}.$$

La résistance totale au mouvement du bateau est Wf , de sorte que, si l'on écrit qu'à la vitesse de croisière les forces propulsives sont égales aux forces résistantes, on obtient la vitesse :

$$U = 1,3 (w^2 (\gamma_0 - \gamma)^2 / \eta \rho L W^2)^{1/3}.$$

Avec les valeurs des paramètres ($\rho = 1 \text{ kg/dm}^3$, $\eta = 10^{-3} \text{ Pa.s}$, $\gamma - \gamma_0 = 40 \text{ mN/m}$), la vitesse est de dix centimètres par seconde environ.

Parce que le bateau entraîne les molécules d'eau à son contact (voir la figure 2) ; la viscosité de l'eau exerce une résistance qui équilibre la force propulsive.

Cette situation d'équilibre dynamique subsiste tant que l'eau située devant la proue reste pure ou, du moins tant qu'elle présente une tension superficielle supérieure à celle de la poupe. Un calcul simple (voir l'encadré) de la vitesse de croisière du bateau déter-

mine la vitesse effectivement observée et, de ce fait, confirme l'analyse proposée : avec les dimensions choisies pour le bateau, une largeur de «moteur» égale à un millimètre, on obtient une vitesse de croisière de dix centimètres par seconde environ, en bon accord avec les observations.

Puis, quand la surface se pollue, la force de propulsion diminue, et le bateau ralentit. Il faut alors changer l'eau pour reprendre les études.

Martin SHANAHAN est directeur de recherche au Centre des matériaux Pierre-Marie Fourt (École des Mines de Paris), à Évry.

C.D. BAIN, G.D. BURNETT-HALL et R.R. MONTGOMERIE, *Rapid Motion of Liquid Drops*, in *Nature*, vol. 372, p. 414, 1994.

F. BROCHARD-WYART et P.-G. de GENNES, *Spontaneous Motion of a Reactive Drop*, in *Comptes rendus de l'Académie des*

sciences, vol. 321 (série lib), p. 285, 1995.

F. DOMINGUES dos SANTOS et T. ONDARÇUHU, *Free Running Droplets*, in *Physical Review Letters*, vol. 75, p. 2972, 1995.

M.E.R. SHANAHAN et P.-G. de GENNES, *Start-up of a Reactive Droplet*, in *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, vol. 324 (série lib), p. 261, 1997.