

LE CRAPS

Le craps est un jeu où une perception naturelle de ces probabilités est cruciale. Dans ce jeu, qui date des années 1840, le lanceur parie une somme d'argent contre d'autres joueurs. Puis le lanceur jette les deux dés. Avec un résultat de 7 ou de 11 au premier jet, il gagne ; avec 2, 3 ou 12 («craps»), il perd. Un résultat de 4, 5, 6, 8, 9 ou 10 devient son «point». Dans ces derniers cas, il doit alors relancer les dés jusqu'à ce qu'il obtienne à nouveau son «point», mais sans faire 7 (le «craps sortant»!). S'il réussit, il gagne tout l'argent, sinon il le perd.

À l'aide de ces règles du jeu, on calcule que les chances de gain du lanceur sont égales à 244/495 (49,3 pour cent), légèrement défavorables. De quelle manière les joueurs professionnels tournent-ils ce léger désavantage à leur profit ? En acceptant ou en rejetant divers «paris additionnels» avec des joueurs. Une autre manière est de tricher, usant de leur dextérité manuelle pour introduire des dés pipés.

Les dés peuvent être truqués de nombreuses façons. Lorsque leurs coins sont rognés ou lorsqu'ils sont «plombés», certains lancers sont plus probables que d'autres. Pis encore, les dés standards peuvent être remplacés par des dés ne portant que trois nombres distincts de points, les faces opposées en ayant le même nombre. La figure 3 en montre un exemple avec seulement des faces 1, 3 et 5. Comme chaque joueur voit au plus trois faces du dé en même temps, et que deux faces adjacentes n'ont jamais le même nombre de points, tout peut sembler normal au cours du jeu. Notons cependant que l'arrangement autour des sommets ne saurait être dans l'ordre standard partout. Si l'ordre 1-3-5 est dans le sens des aiguilles d'une montre autour d'un sommet, il sera dans le sens contraire autour d'un sommet adjacent.

Comment les tricheurs utilisent-ils ces dés ? Une paire de dés 1-3-5, par exemple, ne totalise jamais 7, de sorte qu'avec elle, un joueur n'obtient jamais le «craps sortant» éliminatoire. À l'aide d'une combinaison d'un dé 1-3-5 et d'un dé 2-4-6, on n'obtient jamais de total pair 2, 4, 6, 8, 10 ou 12. Ces dés ne doivent être utilisés qu'exceptionnellement si on ne veut pas qu'ils soient détectés : même les joueurs les plus naïfs finissent par s'étonner de ne tirer que des totaux pairs.

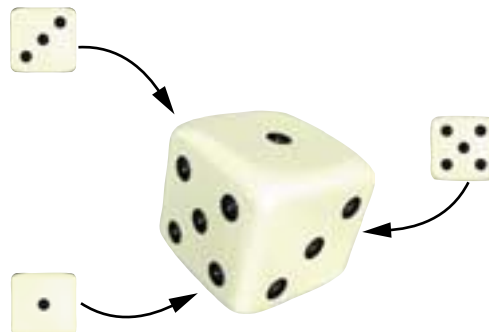
LA MAGIE DES DÉS

Nombre de tours de passe-passe ou de prestidigitation utilisent les dés et beaucoup s'appuient sur le fait que les faces

opposées ont pour somme 7. Un tour est décrit par Martin Gardner dans son livre *Math' Festival* (Éditions Pour la Science, 1981). Le magicien tourne le dos et demande à une personne de l'assistance de jeter trois dés standards, puis d'additionner les nombres tirés. Ensuite, la personne doit choisir l'un quelconque des dés et ajouter le nombre de sa face cachée au total. Enfin, elle relance ce même dé et ajoute le nombre tiré au précédent total, sans dévoiler aucun de ces totaux. Alors le magicien se retourne et indique immédiatement le dernier total obtenu (il voit les dés, mais ne sait pas quel dé a été relancé).

Comment est-ce possible ? Supposons que le premier jet ait donné a , b , c et que le dé choisi porte a . Le total initial est $a + b + c$. On lui ajoute $7 - a$, ce qui donne $b + c + 7$. Le dé a est alors relancé, donnant d , et le résultat final est donc $b + c + d + 7$. Or le magicien lit b , c et d sur les dés ; il lui suffit donc de les ajouter entre eux et à 7.

Henry Ernest Dudeney inclut un artifice différent dans son ouvrage *Amusements in Mathematics* (Dover Publications, 1958). Ici encore, le magicien, dos tourné, demande de lancer trois dés. Cette fois, le volontaire double la valeur d'un premier dé et ajoute 5, puis il multiplie le total par 5 et ajoute la valeur d'un second dé, puis multiplie le résultat par 10 et, enfin,



3. AVEC UNE PAIRE DE DÉS PIPÉS ayant seulement 1, 3 ou 5 points sur les faces, le total 7 (le «craps sortant») n'apparaît jamais.

A	3	4	8
B			
1	A	A	A
5	B	B	A
9	B	B	B

A	1	5	9
B			
2	C	B	B
6	C	C	B
7	C	C	B

A	2	6	7
B			
3	A	C	C
4	A	C	C
8	A	A	A

4. LES DÉS NON TRANSITIFS, notés A, B et C, ont la propriété particulière suivante : en moyenne, B bat A et C bat B mais A bat C. Le dé A est marqué 3 3 4 4 8 8, le dé B, 1 1 5 5 9 9 et le dé C, 2 2 6 6 7 7. Le tableau montre les tirages possibles lorsque deux quelconques de ces étranges dés sont opposés.

Réactions

Le sac de courrier concernant mon article «Le jeu de Junniper Green» (voir *Pour la Science*, juillet 1997) fut à ce point volumineux que «Réactions» lui rendra encore moins justice qu'à l'accoutumée. D'abord, mes excuses pour plusieurs erreurs. La plus grave étant ma référence à «Richard Porteous» comme inventeur du jeu : ce n'est pas Richard, mais Rob. Marc Loveday, de Fruita, Colorado, fait remarquer que le coup 18 de l'encadré omet d'observer que Bob peut choisir 18 au lieu de 2. Beaucoup de lecteurs, dont Arlin Anderson, de Madison, Alabama, et William Shlaer, de Vashon Island, Washington, ont corrigé mes statuts de JG-1 (jeu à une carte), ce qui est secondaire, car Alice ne peut jouer 1 en ouverture, et donc ne peut pas jouer du tout. A. Anderson me corrige aussi sur JG-9, qui est secondaire.

R. Porteous m'a envoyée une analyse de JG-100 effectuée par Peter Conlon, Monique Barendse et Laurie

Fischer, trois de ses élèves actuels. Ils montrent en particulier l'existence de stratégies gagnantes si vous commencez par 58 ou par 62. Michael Tibbetts, de Clearwater, Floride, est arrivé à la même conclusion. Il note que les nombres premiers jouent un rôle dans tous les aspects du jeu et les répartit en quatre types : grands (53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97), assez grands (37, 41, 43, 47), moyens (29, 31) et petits (17, 19). Les ouvertures gagnantes sont les doubles des moyens.

Paul Blatz, de Van Nuys, Californie, rappelle que ce jeu fut étudié dans un cours de théorie des nombres donné à Princeton par Eugene Wigner à la fin des années 1930. Un critère de jeu gagnant dans tous les cas y figurait. L'existence d'une stratégie gagnante à JG- n dépend de la parité des exposants des facteurs premiers de la factorisation de $n!$ (avec $n! =$ factorielle de $n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$).

ajoute la valeur du troisième dé. On indique le total au magicien qui, immédiatement, donne les trois valeurs initiales des dés. En effet, le résultat est $10(5(2a + 5) + b) + c$, soit $100a + 10b + c + 250$. Retirant alors 250, les trois chiffres du résultat sont les nombres a, b, c cherchés.

D'autres problèmes de dés utilisent des dés modifiés avec des marquages non standards. Par exemple, sauriez-vous marquer les faces de deux dés en n'utilisant que les nombres 0, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6, pour obtenir une paire telle que tous les totaux de 1 à 12 soient équiprobables? (La réponse est indiquée en fin d'article).

LES DÉS NON TRANSITIFS

Le phénomène relatif aux dés le plus contraire à l'intuition est sans doute celui des «dés non transitifs». Numérotez trois cubes A, B, C ainsi :

$A : 3 \ 3 \ 4 \ 4 \ 8 \ 8$

$B : 1 \ 1 \ 5 \ 5 \ 9 \ 9$

$C : 2 \ 2 \ 6 \ 6 \ 7 \ 7$

Si un joueur prend le dé B et un autre le dé A et qu'ils jouent un long moment, vous constaterez qu'en moyenne, le dé B bat le dé A . En fait, B présente un nombre supérieur à A , avec la probabilité $5/9$. De même, C bat B avec la même probabilité. Par suite, il semblerait que C batte A , non? Eh bien non! A bat C , avec la probabilité $5/9$! Le tableau de la page précédente (voir la figure 4) justifie clairement ces assertions. Vous pouvez faire fortune avec un ensemble de trois tels dés! Vous laissez votre adversaire choisir son dé, puis vous sélectionnez le dé qui le bat (à long terme, avec une probabilité supérieure à 0,5). Vous gagnerez 55,55 pour cent des jeux alors que votre adversaire a le libre choix du «meilleur» dé!

Une mise en garde cependant : ne vous fondez pas à l'excès sur la théorie des probabilités sans avoir rigoureusement précisé les règles du jeu. Dans son merveilleux petit livre *Au hasard* (Seuil, 1991), Ivar Ekeland raconte l'histoire de deux rois nordiques qui jouèrent aux dés le sort d'une île convoitée. Le roi suédois lança deux dés et obtint un double six. «Cela, fanfaronna-t-il, est imbattable». Olaf, le roi de Norvège marmonna qu'il pourrait lui aussi faire un double six et lança ses deux dés. L'un donna 6 et l'autre se fendit en deux parties, arborant l'une un 1 et l'autre un 6. Total : 13! Ce qui tend à prouver que ce que vous pensez possible dépend de la manière dont vous modélisez le problème.

RÉPONSE : Pour rendre tous les totaux de 1 à 12 équiprobables, il suffit qu'un dé porte : 1, 2, 3, 4, 5, 6 et l'autre 0, 0, 0, 6, 6 et 6.