



Les choix sociaux

CHRISTIAN WALTER

Comment transformer au mieux les préférences individuelles en choix collectifs ? Hélas, on sait qu'il n'existe pas de système de vote qui soit juste !

Comment décider de ce qui sera le mieux pour la collectivité, en présence d'intérêts divergents ? Un exemple paradoxal et archétypique est l'élection d'un homme politique représentatif des préférences individuelles de chacun. C'est un exemple intéressant, du fait que les procédures de vote sont aisément formalisables par les mathématiques.

Prenons le cas où 60 votants ont à choisir entre trois candidats *A*, *B*, et *C*. Pour 23 d'entre eux, le classement est $A > C > B$. Pour 19 d'entre eux, le classement est $B > C > A$. Pour 16 d'entre eux, le classement est $C > B > A$. Pour les deux restants, le classement est $C > A > B$. Aucun votant n'a choisi les ordres de préférence $A > B > C$ ou $B > A > C$ (voir la figure ci-dessous). Quel est le choix social optimal ?

Avec le mode de scrutin uninominal majoritaire à un tour, le candidat *A* est retenu, recueillant 23 voix (*B* obtient 19 voix, *C* obtient 18 voix). Si l'on choisit un mode de scrutin avec majorité relative à deux tours, en conservant les deux meilleurs candidats du premier tour et en introduisant donc un ballottage entre eux, les deux hommes politiques qui ont obtenu le plus de voix sont *A* et *B* : le second tour opposera donc *A* à *B*. Les 23 et les 19 électeurs qui ont voté pour les candidats *A* et *B* confirment leur vote. Comment vont se répartir les voix attribuées à *C* ? Seize voix de *C* vont se reporter sur *B*, et 2 seulement sur *A*. Au final, *B* recueille 35 voix, tandis que *A* ne séduit que 25 électeurs : *A* est battu face à *B*. Imaginons à présent que les deux partis *B* et *C* soient politiquement proches, et que *B* se désiste en faveur de *C* (présentant en *C* un meilleur candidat pour battre *A*). Les 23 et 18 électeurs qui ont voté pour *A* et *C* confirment leur vote. Le report des 19 voix de *B* se fait intégralement sur *C*, qui totalise 37 voix. Autrement dit, lorsqu'il y a un ballottage par introduction d'un deuxième tour, *A* perd à la fois devant *B* et devant *C*. Celui qui arrive en tête du premier tour des élections est battu dans toutes les configurations quand le scrutin introduit un second tour. La règle d'agrégation n'est pas cohérente avec les préférences individuelles.

En 1785, Condorcet imagina une règle d'agrégation qui conserverait la cohérence des préférences individuelles. On compte le nombre de cas où un candidat gagne contre un autre : le gagnant est celui qui est en tête dans ce classement. En appliquant cette règle à l'exemple précédent, *C* est gagnant. Mais il existe des situations (en rouge sur la figure) où *A* gagne contre *B*, *B* contre *C*, et *C* contre *A* : c'est le paradoxe de Condorcet. Pour résoudre ce paradoxe, Condorcet a proposé de rompre la chaîne $A > B > C > A$ sur le ballottage le plus serré. Si l'écart des voix entre *A* et *B* est le plus faible, alors on supprime $A > B$, et *B* devient le gagnant.

Généralisant le paradoxe de Condorcet, le prix Nobel d'économie Kenneth Arrow a montré que la transitivité individuelle ne peut être agrégée simplement, comme l'illustre le paradoxe de Condorcet. Il n'existe pas de règle de choix social cohérente avec les règles des préférences individuelles. Bien plus, la généralisation des résultats d'Arrow par Wilson, en 1972, a fait apparaître qu'il n'existe pas de procédure de vote réaliste qui soit non manipulable !

$A > B > C$	$A > C > B$	$B > A > C$	$B > C > A$	$C > A > B$	$C > B > A$
0	23	0	19	2	16
9	10	10	12	12	7
Scrutin uninominal à un tour : A a 23 voix, B 19 voix, C 18 voix ; A est élu. Scrutin à deux tours où les deux premiers du premier tour participent au second tour : A a 23 + 2 = 25 voix et B 19 + 16 = 35 voix ; B est élu. B se désiste au premier tour pour C : A a 23 voix et C 19 + 2 + 16 = 37 voix ; C est élu. Classement par duel : B bat A par 19 + 16 = 35 contre 23 + 2 = 25 voix, C bat A par 19 + 16 + 2 = 39 contre 23 voix, C bat B par 23 + 18 = 41 voix contre 19 voix ; C, qui gagne deux duels, est élu. Classement par duel : A bat B par 9 + 10 + 12 = 31 contre 10 + 12 + 7 = 29, B bat C par 9 + 10 + 12 = 31 contre 10 + 12 + 7 = 29, C bat A par 12 + 12 + 7 = 31 contre 9 + 10 + 10. Aucune décision n'est possible...					

La situation se complique encore lorsque, dans un système d'élections, il existe des seuils de déclenchement de type «tout ou rien», appelés «seuils critiques». La nature abonde en phénomènes de ce type (tas de sable, avalanches...), et la physique du désordre a développé des outils adaptés à ces changements brutaux. Un physicien du CNRS, Serge Galam, les a appliqués aux élections et a étudié le comportement des systèmes électifs en présence de seuils critiques. Par exemple, dans le système communiste hongrois d'avant la chute du mur, à cinq ou six tours successifs, le seuil critique se situait autour de 76 pour cent des voix. Cela signifie que 75 pour cent d'opposition donnaient zéro pour cent de changement, et cela démocratiquement, tandis que, avec 2 pour cent de plus, à 77 pour cent, il y avait 100 pour cent de changement. Ce système à seuil critique élevé a permis de maintenir le parti communiste hongrois au pouvoir pendant plus de 50 ans, mais il en a également assuré la disparition quasi immédiate, dès lors que le seuil critique était franchi. Plus le nombre de niveaux successifs d'agrégation des votes est grand, et plus cela renforce le mécanisme précédent. Au tennis aussi, celui qui gagne la partie n'est pas toujours celui qui a gagné le plus de points. Avec dix niveaux d'agrégation successifs, 77 pour cent des effectifs de la population ne sont pas représentés. Les systèmes à «grands électeurs» (comme les élections présidentielles aux États-Unis ou les élections sénatoriales en France) présentent ce mécanisme d'éviction.

Mécanismes de basculements rares mais brutaux dans les élections à seuils, manipulabilité des procédures de vote majoritaire, absence de procédures réalistes non manipulables... le passage des préférences individuelles aux choix collectifs est un casse-tête politique. Pas pour les mathématiciens éconômistes, qui connaissent aujourd'hui avec précision les arcanes des procédures d'agrégation sociale. Mais sont-ils écoutés ?