

Enfin, pour satisfaire le critère d'universalité, l'explication mathématique ne doit faire référence à aucun modèle physique spécifique.

Voyons à présent comment on peut engendrer un bruit de type  $1/f$ . On part de deux constatations : la première est qu'il est facile de réaliser un générateur de bruit blanc ; la seconde, est qu'il existe dans la nature un grand nombre de systèmes physiques qui peuvent se « charger » d'une manière ou d'une autre et qui, ensuite, se déchargent lentement selon une loi de type exponentiel.

## Bruit blanc, bruit en $1/f^2$ et constitution du bruit en $1/f$

Une succession de brèves impulsions qui apparaissent aléatoirement et indépendamment correspond à un bruit blanc ; nous pouvons utiliser chaque impulsion pour charger un système physique qui se décharge de manière exponentielle. Les décharges individuelles associées à chaque impulsion s'additionnent pour constituer une courbe de réponse globale. Le système physique avec décharge exponentielle a transformé le bruit blanc en un bruit différent, et l'on démontre que ce nouveau bruit présente une densité spectrale de type  $1/f^2$ . Ce résultat semble prometteur

puisque, en envisageant un processus aléatoire très simple, nous sommes « presque » arrivés au bruit en  $1/f$ . Toutefois, le passage du bruit en  $1/f^2$  au bruit en  $1/f$  est assez difficile, parce qu'il existe une hypothèse additionnelle très forte et difficilement justifiable : la courbe de décharge doit être variable, comme si les caractéristiques du système étaient changées d'une impulsion à l'autre.

Un système physique idéalisé (proposé par l'auteur) comme celui de la figure 7 présente justement des courbes de décharges différentes d'un moment à l'autre. Le système est constitué de divers éléments tous identiques, qui peuvent être chargés comme ils l'étaient précédemment et qui se déchargent toujours tous de la même manière. Certains éléments communiquent, entre eux et avec l'extérieur, de sorte que les impulsions proviennent tant de l'extérieur que d'un autre nœud en train de se décharger. En outre, on suppose que les liaisons entre les nœuds sont perturbées par un bruit blanc et que la charge est transférée d'un nœud à l'autre de manière partiellement aléatoire. Le nombre de liaisons entre un nœud et ses voisins peut être variable, tout comme l'importance de la liaison peut être plus ou moins grande, dans le sens où le transfert de charge

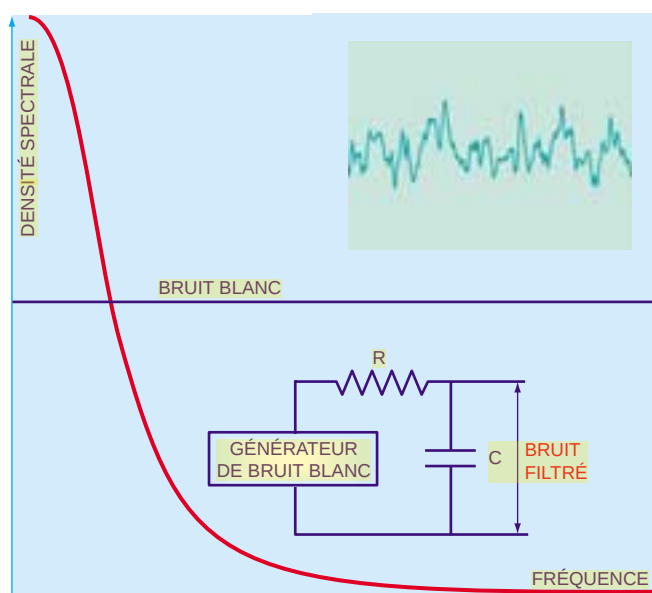
peut survenir plus ou moins facilement (mais ces deux dernières caractéristiques ne sont pas essentielles).

## Une mémoire physique

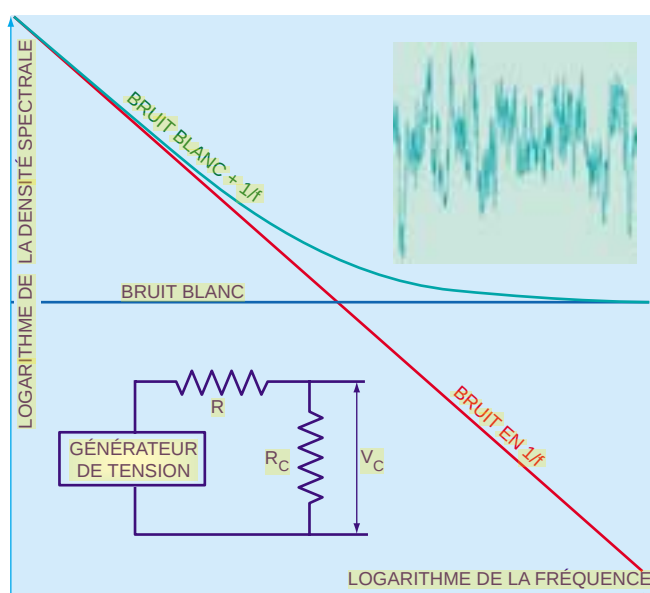
Il est évident qu'un système de ce genre se souvient, du moins en partie, de son propre passé : en effet, lorsqu'un nœud se décharge et, ce faisant, charge son voisin, il peut ensuite être chargé à son tour par ce même voisin. Son état dépend ainsi de son passé. Pour cette raison, même si les nœuds individuels se déchargent toujours de la même manière, le système se comporte globalement comme s'il présentait des temps de décharge différents.

On démontre qu'un réseau carré à deux dimensions produit un bruit en  $1/f$ , du moins dans une certaine bande de fréquences. En dehors de cette bande, la densité spectrale s'aplatit pour les fréquences très basses, tandis qu'elle acquiert une progression de type  $1/f^2$  pour les fréquences hautes. Ce comportement est souhaitable, parce qu'il évite les divergences, tant aux basses qu'aux hautes fréquences.

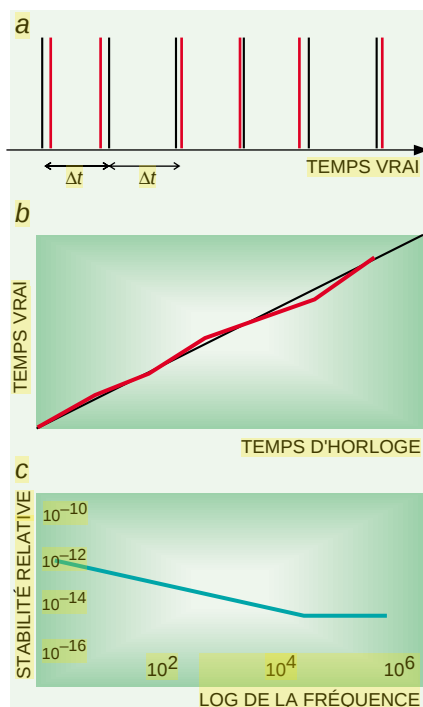
Bien évidemment, l'échange de charge dans les deux sens entre les nœuds adjacents est d'autant plus efficace pour l'établissement d'une



**5. DENSITÉ SPECTRALE DU BRUIT BLANC APRÈS FILTRAGE par un filtre passif RC (en rouge à gauche).** Les oscillations plus rapides (associées aux composantes de Fourier à hautes fréquences) ont disparu. À l'aide d'un simple circuit électrique (à droite), on obtient une fluctuation en  $1/f$  de la tension aux extrémités d'une résistance. La densité spectrale des fluctuations de tension est représentée sur la courbe verte (échelle doublement logarithmique) ;



elle peut être décomposée en deux contributions : l'une blanche, due au bruit Johnson et une contribution  $1/f$  qui n'apparaît qu'à des fréquences extrêmement basses. En haut à droite, on voit comment se présente un bruit qui présente un spectre de type  $1/f$  sur l'écran d'un oscilloscope. Contrairement au bruit blanc, un processus physique qui produit ce type de bruit se souvient au moins en partie de son histoire.



**6. UNE HORLOGE EXACTE** donne des impulsions à intervalles réguliers, comme ceux indiqués en noir (a). Les horloges réelles sont perturbées par des signaux de bruit et donnent des impulsions à intervalles irréguliers, comme indiqué en rouge. La courbe en rouge (b) compare le temps que nous mesurons avec une horloge réelle et le temps réel. Quand le bruit qui perturbe l'horloge est un bruit blanc, la courbe oscille rapidement autour de la droite ; si notre mesure dure suffisamment longtemps, ces oscillations rapides s'annulent : l'erreur relative sur le temps mesuré devient toujours plus petite. Si, toutefois, le bruit est de type  $1/f$ , l'allongement de la durée de la mesure introduit alors une quantité de bruit toujours plus importante : les deux effets se compensent, et donc une extension de la durée de la mesure n'implique aucun accroissement de la précision. Cet effet est illustré en c : la stabilité relative en fréquence d'une horloge atomique au césium augmente avec le temps pendant lequel on calcule la moyenne des erreurs aléatoires, étant donné que c'est le bruit blanc qui limite initialement la précision de la mesure. À partir d'un certain point, le bruit en  $1/f$  prédomine et la stabilité relative reste constante.

«mémoire» que la sortie de la charge du système est difficile. On démontre en effet que la largeur en  $1/f$  de la région centrale de la courbe est d'autant plus grande que le système se rapproche d'un système fermé. D'autres réseaux (ordonnés et désordonnés) de connectivités diverses manifestent le même comportement général, et la progression de la zone centrale est du type  $1/f^a$ , avec  $a$  compris entre 0,5 et 1,5.

## Mesures de précision

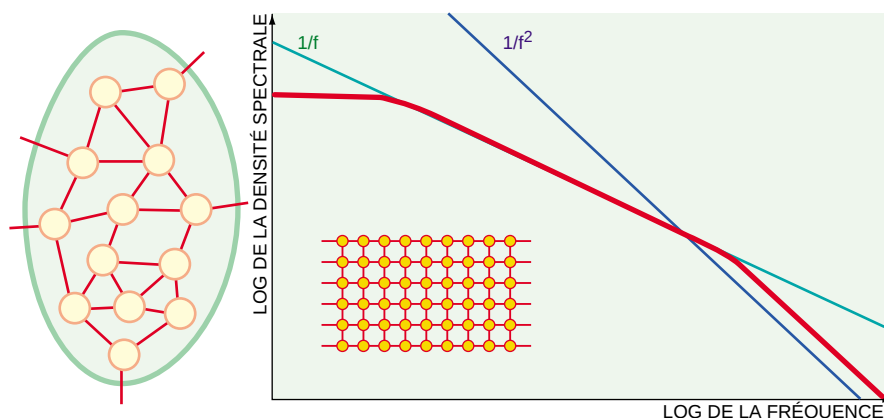
Même les appareils de mesure, tant mécaniques qu'électriques, sont perturbés par le bruit en  $1/f$ , et ce phénomène entraîne des conséquences importantes dans le cas des mesures de précision ; prenons pour exemple la mesure précise du temps.

Si une horloge était parfaite, elle délivrerait des impulsions à des intervalles fixes ; en réalité, les horloges sont per-

turbées par des bruits et délivrent des impulsions à des intervalles irréguliers. La stabilité relative d'une horloge est mesurée par la variation du nombre d'impulsions qu'elle fournit dans un intervalle de temps donné. Si le bruit qui perturbe une horloge est un bruit blanc, alors le nombre d'impulsions peut varier fortement sur des intervalles courts ; cependant, quand la longueur de l'intervalle temporel augmente, les erreurs tendent à se compenser et à s'annuler ; dès lors, l'horloge est plus précise sur de longues périodes que sur des périodes courtes. Quand la durée de la mesure augmente, l'erreur relative pendant le temps mesuré diminue.

Si, toutefois, le bruit est de type  $1/f$ , lorsque l'on augmente la durée de la mesure, on introduit simultanément une quantité de bruit toujours plus grande. Les deux effets se compensent, et l'allongement de la durée de la mesure n'améliore rien. Ainsi, la stabilité d'une horloge de précision croît à mesure qu'augmente le temps sur lequel on calcule la moyenne des erreurs aléatoires, parce que c'est le bruit blanc qui limite la précision de la mesure. À partir d'un certain point, toutefois, le bruit en  $1/f$  devient prépondérant et la stabilité relative reste constante (voir la figure 6).

Si l'on considère l'ubiquité du bruit en  $1/f$  et l'impossibilité de l'éliminer dans des systèmes mécaniques et électroniques de mesure, il est évident que analyses du même type peuvent être étendues à d'autres types de mesures de précision, et le bruit en  $1/f$  constitue ainsi plus qu'une simple curiosité : il est à même d'exercer une influence profonde sur notre capacité à connaître la Nature avec précision.



**7. RÉSEAU** où les nœuds peuvent interagir (des «charges» peuvent être transférées de l'un à l'autre et, pour certains, avec l'extérieur). Le trait vert divise l'«intérieur» et l'«extérieur» du système. Le nombre de liaisons entre un nœud et ses voisins est variable, et la force de cette liaison peut être plus ou moins grande. La «charge» est une charge électrique, ou une quantité de fluide, ou autre chose encore : le modèle est générique et ne se réfère à aucun système physique particulier. La courbe rouge dans la figure de droite indique la densité spectrale que l'on obtient pour un réseau carré à deux dimensions tel que celui illustré en bas à gauche lorsque la «charge» qui entre dans le système est équilibrée par celle qui en sort. La région centrale de la densité spectrale est exactement du type  $1/f$ , tandis qu'elle s'aplatit aux basses fréquences et devient de type  $1/f^2$  aux hautes fréquences. L'extension de la région du type  $1/f$  dépend des caractéristiques d'entrée et de sortie du réseau : plus il est difficile d'entrer ou de sortir du réseau, plus la région en  $1/f$  est étendue.

Edoardo MILOTTI est chercheur à l'Université de Trieste.

H. William PRESS, *Flicker Noises in Astronomy and Elsewhere*, in *Comments on Astrophysics*, n° 7, pp. 103-119, février 1978.

M.B. WEISSMAN, *1/f Noise and other Slow, Nonexponential Kinetics in Condensed Matter*, in *Review of Modern Physics*, n° 60, pp. 537-571, avril 1988.

W.E. ITANO et N.F. RAMSEY, *La misura precisa del tempo*, in *Le Scienze*, n° 301, p. 36, septembre 1993.

Edoardo MILOTTI, *Linear Processes that Produce 1/f or Flicker Noise*, in *Physical Review*, E51, pp. 3087-3103, avril 1995.