

Le coup direct demande une rotation arrière de la bille numéro 1 associée à une quantité de bille précise et, compte tenu de la distance élevée entre billes, un coup de queue de puissance donnée pour conserver cette rotation arrière au moment du choc entre billes ; ce qui est encore plus risqué. En pratique, c'est la tactique robuste en deux bandes qui est choisie par le joueur : attaque haute (pour mettre la bille numéro 1 en roulement sans glissement sur le tapis), quantité de bille proche du 1/2 bille (pour obtenir la déviation de 40°), coup de queue faible (pour ne pas disperser les trois billes), effet de côté à doser (pour régler le rebond sur la première bande et faire le point en deux bandes sur la bille numéro 3). N'est-ce pas là encore une «pratique raisonnée» correspondant à la situation présente du jeu ?

Pratique et théorie sont deux approches complémentaires, sans que la théorie puisse un jour remplacer la pratique. Seule la pratique, en effet, permet de progresser sur le plan de la régularité des performances. La théorie a plutôt une vertu pédagogique : elle permet de comprendre et de faire comprendre à autrui les réglages utilisés par le joueur. Pratique et théorie cohabitent ainsi en une «pratique raisonnée» du billard, et continueront de fasciner à la fois les joueurs et les théoriciens.

Régis PETIT est ingénieur-chercheur à la Direction Études et Recherches d'EDF, à Chatou. Les personnes intéressées par la justification des affirmations de cet article pourront lire son ouvrage : R. PETIT, *Théorie du jeu*, Chiron-Casteilla, 1997.

Sur le site Internet de *Pour la Science* vous pouvez consulter le glossaire franco-anglais des termes du billard et le détail des considérations mécaniques du billard. «rec.sport.billiard» est un des groupes de discussion sur l'Usenet.

G.G. CORIOLIS, *Théorie mathématique des effets du jeu de billard*, Éditions Jacques Gabay, 1990 (réimpression du livre original, Paris, 1835).

J.H. KOEHLER, *The Science of Pocket Billiards*, Sportology Publications, Laguna Hills, California, 1995.

W.C. Marlow, *The Physics of pocket Billiards*, mast, Palm Beach Gardens, Florida, 1995.

J.P. PÉREZ, *Mécanique : points matériels – solides – fluides*, Masson, 1995.

R. RUGÈRE, *Traité de billard*, Leymarie, 1988.

R. Shepard, *Amateur Physics for the Amateur Pool Player (APAPP)*, 3^e éditions, 1997, disponible gratuitement sur le site Internet de Mark Avlon (<http://www.accessone.com/~mavlon/>)



Les fractions et leurs mystères

JEAN-PAUL DELAHAYE

Divisez, divisez, il en restera toujours quelque chose.

Les fractions nous sont familières ? Erreur : nous les connaissons mal. Nous savons les simplifier $100/500 = 10/50 = 1/5$, $12/18 = 6/9 = 2/3$ (si le numérateur et le dénominateur sont divisibles par un même nombre entier, il faut effectuer la division, et cela jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de facteurs communs, excepté 1).

Nous savons faire des divisions $1/5 = 0,2$ et $2/3 = 0,666666...$ Là commencent les ennuis : la division ne tombe pas toujours juste, ce qui conduit à des suites infinies de décimales qu'on ne peut pas écrire toutes !

Cela est fort intéressant et peut nous entraîner très loin, y compris dans des problèmes encore non résolus. Com-

mençons par les fractions au développement décimal fini. Quelles sont-elles ?

Votre expérience vous l'a peut-être déjà fait deviner : les fractions ayant un développement décimal fini sont celles dont (une fois simplifiées) le dénominateur est un produit de 2 et/ou de 5, autrement dit de la forme $2^i 5^j$. Les fractions $9/16 = 0,5625$, $17/250 = 0,068$, $230/1250 = 0,184$ ont une écriture décimale finie, car $16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$, $250 = 2 \times 5 \times 5 \times 5$, $1250 = 2 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$.

Les nombres qui ont une écriture décimale finie sont bien sûr ceux qui, lorsqu'on les multiplie par une puissance de 10 assez grande, donnent des entiers : $0,23432$ multiplié par 10^5 donne 23 432.

Pour cela, il faut que le dénominateur soit composé uniquement de diviseurs de 10, c'est-à-dire un produit de 2 et de 5. Une fraction s'écrit de manière finie en base 10 si, après simplification, le dénominateur est de la forme $2^i 5^j$. Le nombre exact de décimales est le plus grand des deux entiers i et j . Si le dénominateur contient un autre facteur, alors l'écriture décimale est infinie : $5/12 = 0,41666666...$, $3/11 = 0,272727...$, $2/9 = 0,222222...$ etc.

Et dans une autre base de numération ? Une fraction simplifiée s'écrit de manière finie en base B si et seulement si tout facteur premier du dénominateur est aussi un facteur premier de la base B . Par exemple, $2/5$ en base 3, s'écrit : $0,101210210210...$ Le développement est infini, car 5 n'est pas un facteur premier de 3. En base 9, $16/27$ s'écrit : $0,53$. C'est fini, car 27 n'a qu'un facteur premier : 3, qui est aussi un facteur premier de 9.

Des rappels d'arithmétique sont proposés dans la figure 1, et la méthode pour écrire un nombre entier ou réel en base B est expliquée à la figure 2.

Les développements infinis que nous avons écrits nous ont montré que l'écriture des fractions, lorsqu'elle n'était pas finie, était répétitive. Quelle est la période de cette répétition ?

1. SOUVENIRS D'ARITHMÉTIQUE

L'arithmétique n'est plus guère enseignée et peut-être avez-vous oublié ses merveilles (qui sont utiles dans le texte).

• **Nombre premier** : nombre divisible seulement par 1 et lui-même.

Exemples 2, 3, 5, 7, 11, 13.

Le nombre 9 n'est pas premier, car divisible par 3.

• **Facteurs premiers** : tout nombre entier s'écrit comme produit de facteurs premiers d'une seule façon : sa décomposition en facteurs premiers. Exemples : $100 = 2 \times 2 \times 5 \times 5$, $122 = 2 \times 61$, $99 = 3 \times 3 \times 11$.

• **Un nombre est un carré** si et seulement si sa décomposition en facteurs premiers ne comporte que des exposants pairs.

Exemple : $400 = 20^2 = 2^4 5^2$

• **Arithmétique modulaire** ou arithmétique modulo n . On compte comme avec les entiers, mais on soustrait ou on ajoute n autant de fois que nécessaire pour toujours se ramener à des nombres entre 0 et $n - 1$. Exemple : $12 = 3 \bmod 9$, $100 = 1 \bmod 9$ (car $100 = 11 \times 9 + 1$; donc, en enlevant 9, 11 fois de suite, on trouve 1)

• **Théorème de Bézout**. Si deux nombres a et b n'ont pas de facteurs communs, alors on peut trouver des entiers (positifs ou négatifs) tels que $aa' + bb' = 1$ (et donc tels que $aa' = 1 \bmod b$)



Faisons quelques tests :

$$7/33 = 0,212121212121212121...$$

$$7/13 = 0,538461538461538461...$$

(538461 se répète toujours)

Le phénomène n'est pas propre à la base 10. En base 3 : $1/2 = 0,111111...$, $1/5 = 0,012012012012012...$: toutes les fractions ont un développement en base 10 (ou autres) qui finit par se répéter, et réciproquement, si un nombre est périodique dans une base, c'est un rapport de deux entiers (et il est donc périodique dans toute base).

LES NOMBRES PÉRIODIQUES

Les nombres ayant un développement fini peuvent être vus comme des nombres ayant un développement périodique de période de longueur nulle. Nous adopterons ce point de vue quand nous parlerons de nombres périodiques. Nous adopterons aussi la notation $12,35[47]$ pour représenter le nombre périodique $12,3547474747...$ dont la séquence 47 se répète après le début 12,35.

Quelle est la fraction qui correspond au développement décimal périodique général : $a_1a_2...a_n, b_1b_2...b_m [c_1c_2...c_p]$, n chiffres devant la virgule, puis m chiffres, puis une partie de p chiffres qui se répètent sans cesse ? Le calcul montre que c'est la fraction :

$$\frac{a_1...a_nb_1...b_m/10^m + c_1...c_p/10^m(10^p - 1)}{10^m - 10^{m+p}}$$

Par exemple : $12,3547474747... = 12,35[47] = 1235/100 + 47/9900 = 30578/2475$

$$\begin{aligned} 463,124558642642642642... &= \\ 463,124558[642] &= \\ 463124558/1000000 + 642/999000000 &= \\ = 38555119507/83250000 \end{aligned}$$

Dans le cas d'une base B quelconque, le résultat est bien sûr obtenu en remplaçant 10 par la base B dans la formule ci-dessus.

Le fait est évident : lorsqu'on effectue une division, on finit toujours par retomber sur un reste obtenu précédemment (ce qui signifie que le quotient est périodique). Cela démontre que les fractions s'écrivent avec un développement périodique et que ce sont les seuls nombres ainsi : «être une fraction» est parfaitement équivalent à «avoir des chiffres périodiques».

On en déduit un résultat amusant d'algèbre infinie : si vous faites la somme, la multiplication ou la division de deux nombres périodiques (ce qui en théorie prendrait un temps infini, mais les mathématiciens ne s'arrêtent pas à de tels détails), le résultat est un développement périodique. Par exemple, si vous divisez l'un par l'autre deux nombres dont le développement est périodique, vous calculez le développement d'une fraction de

2. ÉCRITURE EN BASE B D'UN NOMBRE ENTIER

Six est entier vous le divisez par B , le reste vous indique son chiffre des unités en base B ; en recommençant avec le quotient, vous obtenez le chiffre suivant, etc.

Exemple : 123 en base 3

$$\begin{array}{rcl} 123 & = & 41 \times 3 + 0 \text{ donc } 0 \\ 41 & = & 13 \times 3 + 2 \text{ donc } 2 \\ 13 & = & 4 \times 3 + 1 \text{ donc } 1 \\ 4 & = & 1 \times 3 + 1 \text{ donc } 1 \\ 1 & = & 1 \text{ donc } 1 \end{array}$$

donc 123 s'écrit 11120 en base 3.

Si x n'est pas entier. Convertissez d'abord la partie devant la virgule en base B . Pour le reste, voici le procédé : multipliez par B ; ce qui se trouve alors devant la virgule est le premier chiffre après la virgule. Multipliez ce qui reste par B ; ce qui se trouve alors devant la virgule est le second chiffre, etc.

Exemple : $123,541$ en base 3

par conversion en base 3 de ce qui est devant la virgule 11120 ;

il reste 0,541

$$0,541 \text{ multiplié par } 3 \text{ cela donne } 1,623 \text{ donc } 1 ; \text{ il reste } 0,623$$

$$0,623 \text{ multiplié par } 3 \text{ cela donne } 1,869 \text{ donc } 1 ; \text{ il reste } 0,869$$

$$0,869 \text{ multiplié par } 3 \text{ cela donne } 2,607 \text{ donc } 2 ; \text{ il reste } 0,669$$

donc le début est $11120,112$

Si l'on poursuit on obtient :

$11120,11212110111120200112211012222002221101100012120220101021202...$

fractions $(a/b) / (c/d)$ qui est une fraction ad/bc et qui possède donc un développement périodique.

La caractérisation des nombres rationnels (les fractions) comme nombres ayant un développement périodique est indépendante de la base. Cela signifie que l'algorithme de changement de base décrit à la figure 2 préserve la périodicité (et la non-périodicité).

Aussi la périodicité est-elle une propriété qui se conserve bien : elle persiste quand on multiplie, quand on divise, quand on change de base de numération.

RACINES CARRÉES PÉRIODIQUES?

Pour la racine carrée, est-ce aussi simple ? Non. La racine carrée d'un nombre dont le développement est périodique peut ne pas être périodique et ne l'est même qu'exceptionnellement. La racine carrée N/D d'un nombre périodique n/d est périodique si et seulement si son numérateur et son dénominateur sont tous deux des carrés parfaits (comme 4, 9, 16, 25, etc.).

La démonstration de ce résultat tient en quelques mots. Supposons que n/d est simplifié, ainsi que N/D ; $n/d = N^2/D^2$, ce qui équivaut à $nD^2 = dN^2$. Tout facteur premier p de n divise N^2 (car il ne peut pas diviser d puisque n/d a été simplifié), donc il divise N un nombre pair de fois, disons $2i$ fois (car, dans la décomposition en facteur premier d'un carré, chaque exposant est pair). Mais puisque les deux nombres nD^2 et dN^2 sont égaux,

ils ont la même décomposition en facteurs premiers, et comme p ne peut pas apparaître dans celle de D (car p divise N et N/D a été supposée simplifiée), c'est que p^{2i} est présent dans la décomposition de n . Cela étant vrai pour tout facteur premier de n , n est un carré parfait. De même, d est un carré parfait. Il est donc nécessaire, pour qu'une racine carrée de fraction n/d soit périodique, que n et d soient des carrés parfaits. C'est bien sûr aussi suffisant.

Ni 2 ni 3 n'étant des carrés parfaits, le développement de leur racine carrée n'est pas périodique.

LES IRRATIONNELS ARTIFICIELS ET NATURELS

Si les nombres rationnels sont les nombres dont le développement est périodique, cela signifie deux choses intéressantes et, à nouveau, non triviales.

À chaque fois que l'on écrit un nombre dont les chiffres ne sont pas périodiques, comme $0,1211211121111211112...$ (des séquences de 1 de plus en plus longues séparées par des 2), alors ce n'est pas une fraction : ne cherchez pas, aucun quotient de deux nombres entiers n'aura ce développement décimal !

Aussi, il existe des nombres qui ne sont pas des fractions (ce qui n'est pas si évident que cela). Ces nombres, qui ne sont pas quotients de deux entiers, s'appellent les irrationnels ; lorsque les Grecs découvrirent leur existence (à propos de racine de 2), ils en furent très éton-