

Faisons quelques tests :

$$7/33 = 0,21212121212121212121\dots$$

$$7/13 = 0,538461538461538461\dots$$

(538461 se répète toujours)

Le phénomène n'est pas propre à la base 10. En base 3 : $1/2 = 0,11111\dots$, $1/5 = 0,012012012012\dots$: toutes les fractions ont un développement en base 10 (ou autres) qui finit par se répéter, et réciproquement, si un nombre est périodique dans une base, c'est un rapport de deux entiers (et il est donc périodique dans toute base).

LES NOMBRES PÉRIODIQUES

Les nombres ayant un développement fini peuvent être vus comme des nombres ayant un développement périodique de période de longueur nulle. Nous adopterons ce point de vue quand nous parlerons de nombres périodiques. Nous adopterons aussi la notation $12,35[47]$ pour représenter le nombre périodique $12,35474747\dots$ dont la séquence 47 se répète après le début 12,35.

Quelle est la fraction qui correspond au développement décimal périodique général : $a_1a_2\dots a_n, b_1b_2\dots b_m [c_1c_2\dots c_p]$, n chiffres devant la virgule, puis m chiffres, puis une partie de p chiffres qui se répètent sans cesse ? Le calcul montre que c'est la fraction :

$$\frac{a_1\dots a_n b_1\dots b_m / 10^m + c_1\dots c_p / 10^m (10^p - 1)}{10^m - 10^{m+n}}$$

Par exemple : $12,35474747\dots = 12,35[47] = 1235 / 100 + 47 / 9900 = 30578 / 2475$

$$\begin{aligned} 463,124558642642642642\dots &= \\ 463,124558[642] &= \\ 463124558 / 1000000 + 642 / 999000000 &= \\ = 38555119507 / 83250000 \end{aligned}$$

Dans le cas d'une base B quelconque, le résultat est bien sûr obtenu en remplaçant 10 par la base B dans la formule ci-dessus.

Le fait est évident : lorsqu'on effectue une division, on finit toujours par retomber sur un reste obtenu précédemment (ce qui signifie que le quotient est périodique). Cela démontre que les fractions s'écrivent avec un développement périodique et que ce sont les seuls nombres ainsi : «être une fraction» est parfaitement équivalent à «avoir des chiffres périodiques».

On en déduit un résultat amusant d'algèbre infinie : si vous faites la somme, la multiplication ou la division de deux nombres périodiques (ce qui en théorie prendrait un temps infini, mais les mathématiciens ne s'arrêtent pas à de tels détails), le résultat est un développement périodique. Par exemple, si vous divisez l'un par l'autre deux nombres dont le développement est périodique, vous calculez le développement d'une fraction de

2. ÉCRITURE EN BASE B D'UN NOMBRE ENTIER

Six est entier vous le divisez par B , le reste vous indique son chiffre des unités en base B ; en recommençant avec le quotient, vous obtenez le chiffre suivant, etc.

Exemple : 123 en base 3

$$\begin{array}{rcl} 123 & = & 41 \times 3 + 0 \quad \text{donc } 0 \\ 41 & = & 13 \times 3 + 2 \quad \text{donc } 2 \\ 13 & = & 4 \times 3 + 1 \quad \text{donc } 1 \\ 4 & = & 1 \times 3 + 1 \quad \text{donc } 1 \\ 1 & = & 1 \quad \text{donc } 1 \end{array}$$

donc 123 s'écrit 11120 en base 3.

Si x n'est pas entier. Convertissez d'abord la partie devant la virgule en base B . Pour le reste, voici le procédé : multipliez par B ; ce qui se trouve alors devant la virgule est le premier chiffre après la virgule. Multipliez ce qui reste par B ; ce qui se trouve alors devant la virgule est le second chiffre, etc.

Exemple : $123,541$ en base 3

par conversion en base 3 de ce qui est devant la virgule 11120 ; il reste 0,541

$$\begin{array}{ll} 0,541 \text{ multiplié par } 3 \text{ cela donne } 1,623 & \text{donc } 1 ; \text{ il reste } 0,623 \\ 0,623 \text{ multiplié par } 3 \text{ cela donne } 1,869 & \text{donc } 1 ; \text{ il reste } 0,869 \\ 0,869 \text{ multiplié par } 3 \text{ cela donne } 2,607 & \text{donc } 2 ; \text{ il reste } 0,669 \end{array}$$

donc le début est $11120,112$

Si l'on poursuit on obtient :

$$11120,11212110111120200112211012222002221101100012120220101021202\dots$$

fractions $(a/b) / (c/d)$ qui est une fraction ad/bc et qui possède donc un développement périodique.

La caractérisation des nombres rationnels (les fractions) comme nombres ayant un développement périodique est indépendante de la base. Cela signifie que l'algorithme de changement de base décrit à la figure 2 préserve la périodicité (et la non-périodicité).

Aussi la périodicité est-elle une propriété qui se conserve bien : elle persiste quand on multiplie, quand on divise, quand on change de base de numération.

RACINES CARRÉES PÉRIODIQUES?

Pour la racine carrée, est-ce aussi simple ? Non. La racine carrée d'un nombre dont le développement est périodique peut ne pas être périodique et ne l'est même qu'exceptionnellement. La racine carrée N/D d'un nombre périodique n/d est périodique si et seulement si son numérateur et son dénominateur sont tous deux des carrés parfaits (comme 4, 9, 16, 25, etc.).

La démonstration de ce résultat tient en quelques mots. Supposons que n/d est simplifié, ainsi que N/D ; $n/d = N^2/D^2$, ce qui équivaut à $n D^2 = d N^2$. Tout facteur premier p de n divise N^2 (car il ne peut pas diviser d puisque n/d a été simplifié), donc il divise N un nombre pair de fois, disons $2i$ fois (car, dans la décomposition en facteur premier d'un carré, chaque exposant est pair). Mais puisque les deux nombres $n D^2$ et $d N^2$ sont égaux,

ils ont la même décomposition en facteurs premiers, et comme p ne peut pas apparaître dans celle de D (car p divise N et N/D a été supposée simplifiée), c'est que p^{2i} est présent dans la décomposition de n . Cela étant vrai pour tout facteur premier de n , n est un carré parfait. De même, d est un carré parfait. Il est donc nécessaire, pour qu'une racine carrée de fraction n/d soit périodique, que n et d soient des carrés parfaits. C'est bien sûr aussi suffisant.

Ni 2 ni 3 n'étant des carrés parfaits, le développement de leur racine carrée n'est pas périodique.

LES IRRATIONNELS ARTIFICIELS ET NATURELS

Si les nombres rationnels sont les nombres dont le développement est périodique, cela signifie deux choses intéressantes et, à nouveau, non triviales.

À chaque fois que l'on écrit un nombre dont les chiffres ne sont pas périodiques, comme $0,1211211121111211112\dots$ (des séquences de 1 de plus en plus longues séparées par des 2), alors ce n'est pas une fraction : ne cherchez pas, aucun quotient de deux nombres entiers n'aura ce développement décimal !

Aussi, il existe des nombres qui ne sont pas des fractions (ce qui n'est pas si évident que cela). Ces nombres, qui ne sont pas quotients de deux entiers, s'appellent les irrationnels ; lorsque les Grecs découvrirent leur existence (à propos de racine de 2), ils en furent très éton-

3. PETITS CALCULS

$$1/3 = 0,333333... = 0,[3]$$

$$2/3 = 0,666666... = 0,[6]$$

$$1/6 = 0,166666... = 0,[16]$$

$$2/6 = 0,333333... = 0,[3]$$

$$3/6 = 0,5$$

$$4/6 = 0,666666... = 0,[6]$$

$$5/6 = 0,833333... = 0,8[3]$$

$$1/7 = 0,142857142857... = 0,[142857]$$

$$2/7 = 0,285714285714... = 0,[285714]$$

$$3/7 = 0,428571428571... = 0,[428571]$$

$$4/7 = 0,571428571428... = 0,[571428]$$

$$5/7 = 0,714285714285... = 0,[714285]$$

$$6/7 = 0,857142857142... = 0,[857142]$$

$$1/9 = 0,111... = 0,[1]$$

$$2/9 = 0,222... = 0,[2]$$

$$3/9 = 0,333... = 0,[3]$$

$$4/9 = 0,444... = 0,[4]$$

$$5/9 = 0,555... = 0,[5]$$

$$6/9 = 0,666... = 0,[6]$$

$$7/9 = 0,777... = 0,[7]$$

$$8/9 = 0,888... = 0,[8]$$

$$1/11 = 0,090909... = 0,[09]$$

$$2/11 = 0,181818... = 0,[18]$$

$$3/11 = 0,272727... = 0,[27]$$

$$4/11 = 0,363636... = 0,[36]$$

$$5/11 = 0,454545... = 0,[45]$$

$$6/11 = 0,545454... = 0,[54]$$

$$7/11 = 0,636363... = 0,[63]$$

$$8/11 = 0,727272... = 0,[72]$$

$$9/11 = 0,818181... = 0,[81]$$

$$10/11 = 0,909090... = 0,[90]$$

$$1/12 = 0,083333... = 0,08[3]$$

$$2/12 = 0,166666... = 0,1[6]$$

$$3/12 = 0,25$$

$$4/12 = 0,333333... = 0,[3]$$

$$5/12 = 0,416666... = 0,41[6]$$

$$6/12 = 0,5$$

$$7/12 = 0,583333... = 0,58[3]$$

$$8/12 = 0,666666... = 0,[6]$$

$$9/12 = 0,75$$

$$10/12 = 0,833333... = 0,8[3]$$

$$11/12 = 0,916666... = 0,91[6]$$

$$1/13 = 0,[076923]$$

$$2/13 = 0,[153846]$$

$$3/13 = 0,[230769]$$

$$4/13 = 0,[307692]$$

$$5/13 = 0,[384615]$$

$$6/13 = 0,[461538]$$

$$7/13 = 0,[538461]$$

$$8/13 = 0,[615384]$$

$$9/13 = 0,[692307]$$

$$10/13 = 0,[769230]$$

$$11/13 = 0,[846153]$$

$$12/13 = 0,[923076]$$

En base 2

$$1/9 = 0,000111000111... = 0,[000111]$$

$$3/9 = 0,01010101... = 0,[10]$$

nés. Tous les nombres suivants sont donc des irrationnels :

0,055000555500005555550000000...
(un 0, deux 5, trois 0, quatre 5, etc.)
0,4884888848888888884... (un 4, deux 8, un 4, quatre 8, un 4, huit 8, etc.)
0,1234567891011121314... (nombre de Champernowne, constitué par la chaîne des entiers)
0,235791113... (les nombres premiers les uns derrière les autres).

Le second résultat un peu étonnant qui résulte de la caractérisation des rationnels est que, si l'on découvre qu'un nombre n'est pas rationnel, alors on sait aussitôt, sans rien avoir à calculer, que ses chiffres en base 10 (ou autre) ne sont pas périodiques. Puisque racine de deux n'est pas rationnel (2 n'est pas un quotient de deux carrés parfaits), ses décimales ne sont pas périodiques, de même que ses chiffres en binaire. Même si vous ne savez pas les calculer, même si vous n'en avez jamais calculé aucun, vous savez que, quelle que soit la base de numération utilisée, les chiffres de racine de deux ne sont pas périodiques. Le mathématicien est un magicien qui fait connaître l'infini.

PÉRIODES ÉGALES ET INÉGALES

Étudions maintenant les choses plus systématiquement. Le tableau de la figure 3 indique ce que donnent les divisions des nombres entre 0 et 1, avec un dénominateur inférieur ou égal à 13. Nous avons éliminé les dénominateurs 2, 4, 5, 8 et 10, car nous savons que toutes les fractions avec ces dénominateurs ont des développements finis en base 10.

Surprise : il semble que, pour un dénominateur donné, toutes les fractions qui ne se simplifient pas ont la même longueur de période. Pourrait-on le démontrer ? Oui, et cela va nous entraîner dans des raisonnements un peu plus compliqués que précédemment, mais tel est le prix à payer pour passer d'une constatation empirique à une certitude mathématique.

Pour une fraction n/d non simplifiable et de développement infini, nous supposons n plus petit que d , ce qui revient à ne garder que la partie non entière des fractions. Pensons, pour notre démonstration, à l'opération de division comme nous la posons à l'école

– le premier reste est le reste de la division de $10n$ par d (car on a ajouté un zéro à n pour que d y soit au moins une fois),
– le second est celui de la division de $100n$ par d , etc.

Les restes ne peuvent pas être tous différents, car ils sont inférieurs à d , donc à un certain moment, on retombera sur un reste déjà obtenu à une étape antérieure i . Soit i et $i + j$ les plus petits

des numéros d'étapes où se produit l'égalité de deux restes. Les nombres i et j sont ceux qui donnent l'endroit où commence la période et sa longueur. Dans le langage de l'arithmétique modulaire, n/d est périodique de période j à partir du chiffre i , si et seulement si i et j sont les plus petits entiers tels que : $n10^i = n10^{i+j} \bmod d$ (rappelons que « $\bmod d$ » signifie qu'on ne garde d'un nombre que son reste après la division par n , ou, exprimé autrement, qu'on revient à zéro quand on arrive à n : $0 = 0 \bmod 3$; $1 = 1 \bmod 3$; $2 = 2 \bmod 3$; $3 = 0 \bmod 3$; $4 = 1 \bmod 3$; $5 = 2 \bmod 3$; $6 = 0 \bmod 3$; etc.)

Exemple. Prenons $1/84$. Si on pose la division, on trouve $1/84 = 0,01[190476]$, on constate que $i = 2$ et $j = 6$.

Vérifions cela par un calcul en arithmétique modulaire :

$$10^0 = 1 \bmod 84$$

$$10^1 = 10 \bmod 84$$

$$10^2 = 100 = 16 \bmod 84$$

$$10^3 = 160 = 76 \bmod 84$$

$$10^4 = 760 = 4 \bmod 84$$

$$10^5 = 40 \bmod 84$$

$$10^6 = 400 = 64 \bmod 84$$

$$10^7 = 640 = 52 \bmod 84$$

$$10^8 = 520 = 16 \bmod 84$$

On retombe sur 16 pour $i = 2$ (le début de la période) après $j = 6$ multiplications supplémentaires par 10.

Lorsque n et d n'ont pas de facteurs communs, l'égalité modulaire ci-dessus ne dépend pas de n , car il existe un nombre n' tel que $nn' = 1 \bmod d$ (voir sur la figure 1 le théorème de Bézout), et on multiplie chaque côté de l'égalité modulaire par ce n' , ce qui la simplifie en : $10^i = 10^{i+j} \bmod d$.

Cela est remarquable : toutes les fractions simplifiées ayant le même dénominateur ont un développement ayant la même période et cette période commence au même endroit après la virgule. Toutes les fractions ayant 12 comme dénominateur (voir la figure 3) et ne se simplifiant pas ont un développement dont la période est de longueur 1 qui commence au troisième chiffre après la virgule. De même, la période commune aux fractions de dénominateur 7 est constante (c'est 6).

Si on suppose maintenant que d n'est divisible ni par 2 ni par 5, alors on peut simplifier par 10^i (car cela signifie que d et 10 sont premiers entre eux et donc, grâce au théorème de Bézout, qu'il existe un nombre k tel que $10k = 1 \bmod d$). De $10^i = 10^{i+j} \bmod d$, on passe donc à $1 = 10^j \bmod d$, qui signifie que la période commence juste après la virgule et que la longueur de la période est le plus petit entier j tel que : $1 = 10^j \bmod d$ (c'est-à-dire tel que $10^j - 1$, soit un multiple de d).

À nouveau, cela explique pourquoi à la figure 4, pour 6, 12, 14, on n'a pas de