

3. PETITS CALCULS

$1/3 = 0,3333333... = 0,.[3]$
 $2/3 = 0,6666666... = 0,.[6]$
 $1/6 = 0,1666666... = 0,.[6]$
 $2/6 = 0,3333333... = 0,.[3]$
 $3/6 = 0,5$
 $4/6 = 0,6666666... = 0,.[6]$
 $5/6 = 0,8333333... = 0,.[8]$
 $1/7 = 0,142857142857... = 0,.[142857]$
 $2/7 = 0,285714285714... = 0,.[285714]$
 $3/7 = 0,428571428571... = 0,.[428571]$
 $4/7 = 0,571428571428... = 0,.[571428]$
 $5/7 = 0,714285714285... = 0,.[714285]$
 $6/7 = 0,857142857142... = 0,.[857142]$
 $1/9 = 0,111... = 0,.[1]$
 $2/9 = 0,222... = 0,.[2]$
 $3/9 = 0,333... = 0,.[3]$
 $4/9 = 0,444... = 0,.[4]$
 $5/9 = 0,555... = 0,.[5]$
 $6/9 = 0,666... = 0,.[6]$
 $7/9 = 0,777... = 0,.[7]$
 $8/9 = 0,888... = 0,.[8]$
 $1/11 = 0,090909... = 0,.[09]$
 $2/11 = 0,181818... = 0,.[18]$
 $3/11 = 0,272727... = 0,.[27]$
 $4/11 = 0,363636... = 0,.[36]$
 $5/11 = 0,454545... = 0,.[45]$
 $6/11 = 0,545454... = 0,.[54]$
 $7/11 = 0,636363... = 0,.[63]$
 $8/11 = 0,727272... = 0,.[72]$
 $9/11 = 0,818181... = 0,.[81]$
 $10/11 = 0,909090... = 0,.[90]$
 $1/12 = 0,083333... = 0,.[08]$
 $2/12 = 0,166666... = 0,.[16]$
 $3/12 = 0,25$
 $4/12 = 0,333333... = 0,.[3]$
 $5/12 = 0,416666... = 0,.[41]$
 $6/12 = 0,5$
 $7/12 = 0,583333... = 0,.[58]$
 $8/12 = 0,666666... = 0,.[6]$
 $9/12 = 0,75$
 $10/12 = 0,833333... = 0,.[83]$
 $11/12 = 0,916666... = 0,.[91]$
 $1/13 = 0,.[076923]$
 $2/13 = 0,.[153846]$
 $3/13 = 0,.[230769]$
 $4/13 = 0,.[307692]$
 $5/13 = 0,.[384615]$
 $6/13 = 0,.[461538]$
 $7/13 = 0,.[538461]$
 $8/13 = 0,.[615384]$
 $9/13 = 0,.[692307]$
 $10/13 = 0,.[769230]$
 $11/13 = 0,.[846153]$
 $12/13 = 0,.[923076]$
 En base 2
 $1/9 = 0,000111000111... = 0,.[000111]$
 $3/9 = 0,01010101... = 0,.[10]$

nés. Tous les nombres suivants sont donc des irrationnels :

$0,0550005555000055555500000000...$ (un 0, deux 5, trois 0, quatre 5, etc.)
 $0,488488884888888884... (un 4, deux 8, un 4, quatre 8, un 4, huit 8, etc.)$
 $0,1234567891011121314... (nombre de Champernowne, constitué par la chaîne des entiers)$
 $0,235791113... (les nombres premiers les uns derrière les autres).$

Le second résultat un peu étonnant qui résulte de la caractérisation des rationnels est que, si l'on découvre qu'un nombre n'est pas rationnel, alors on sait aussitôt, sans rien avoir à calculer, que ses chiffres en base 10 (ou autre) ne sont pas périodiques. Puisque racine de deux n'est pas rationnel (2 n'est pas un quotient de deux carrés parfaits), ses décimales ne sont pas périodiques, de même que ses chiffres en binaire. Même si vous ne savez pas les calculer, même si vous n'en avez jamais calculé aucun, vous savez que, quelle que soit la base de numération utilisée, les chiffres de racine de deux ne sont pas périodiques. Le mathématicien est un magicien qui fait connaître l'infini.

PÉRIODES ÉGALES ET INÉGALES

Étudions maintenant les choses plus systématiquement. Le tableau de la figure 3 indique ce que donnent les divisions des nombres entre 0 et 1, avec un dénominateur inférieur ou égal à 13. Nous avons éliminé les dénominateurs 2, 4, 5, 8 et 10, car nous savons que toutes les fractions avec ces dénominateurs ont des développements finis en base 10.

Surprise : il semble que, pour un dénominateur donné, toutes les fractions qui ne se simplifient pas ont la même longueur de période. Pourrait-on le démontrer ? Oui, et cela va nous entraîner dans des raisonnements un peu plus compliqués que précédemment, mais tel est le prix à payer pour passer d'une constatation empirique à une certitude mathématique.

Pour une fraction n/d non simplifiable et de développement infini, nous supposons n plus petit que d , ce qui revient à ne garder que la partie non entière des fractions. Pensons, pour notre démonstration, à l'opération de division comme nous la posons à l'école

– le premier reste est le reste de la division de $10n$ par d (car on a ajouté un zéro à n pour que d y soit au moins une fois),
 – le second est celui de la division de $100n$ par d , etc.

Les restes ne peuvent pas être tous différents, car ils sont inférieurs à d , donc à un certain moment, on retombera sur un reste déjà obtenu à une étape antérieure i . Soit i et $i + j$ les plus petits

des numéros d'étapes où se produit l'égalité de deux restes. Les nombres i et j sont ceux qui donnent l'endroit où commence la période et sa longueur. Dans le langage de l'arithmétique modulaire, n/d est périodique de période j à partir du chiffre i , si et seulement si i et j sont les plus petits entiers tels que : $n10^i = n10^{i+j} \bmod d$ (rappelons que « $\bmod d$ » signifie qu'on ne garde d'un nombre que son reste après la division par n , ou, exprimé autrement, qu'on revient à zéro quand on arrive à n : $0 = 0 \bmod 3$; $1 = 1 \bmod 3$; $2 = 2 \bmod 3$; $3 = 0 \bmod 3$; $4 = 1 \bmod 3$; $5 = 2 \bmod 3$; $6 = 0 \bmod 3$; etc.)

Exemple. Prenons $1/84$. Si on pose la division, on trouve $1/84 = 0,01[190476]$, on constate que $i = 2$ et $j = 6$.

Vérifions cela par un calcul en arithmétique modulaire :

$$\begin{aligned}
 10^0 &= 1 \bmod 84 \\
 10^1 &= 10 \bmod 84 \\
 10^2 &= 100 = 16 \bmod 84 \\
 10^3 &= 160 = 76 \bmod 84 \\
 10^4 &= 760 = 4 \bmod 84 \\
 10^5 &= 40 \bmod 84 \\
 10^6 &= 400 = 64 \bmod 84 \\
 10^7 &= 640 = 52 \bmod 84 \\
 10^8 &= 520 = 16 \bmod 84
 \end{aligned}$$

On retombe sur 16 pour $i = 2$ (le début de la période) après $j = 6$ multiplications supplémentaires par 10.

Lorsque n et d n'ont pas de facteurs communs, l'égalité modulaire ci-dessus ne dépend pas de n , car il existe un nombre n' tel que $nn' = 1 \bmod d$ (voir sur la figure 1 le théorème de Bézout), et on multiplie chaque côté de l'égalité modulaire par ce n' , ce qui la simplifie en : $10^i = 10^{i+j} \bmod d$.

Cela est remarquable : toutes les fractions simplifiées ayant le même dénominateur ont un développement ayant la même période et cette période commence au même endroit après la virgule. Toutes les fractions ayant 12 comme dénominateur (voir la figure 3) et ne se simplifiant pas ont un développement dont la période est de longueur 1 qui commence au troisième chiffre après la virgule. De même, la période commune aux fractions de dénominateur 7 est constante (c'est 6).

Si on suppose maintenant que d n'est divisible ni par 2 ni par 5, alors on peut simplifier par 10^i (car cela signifie que d et 10 sont premiers entre eux et donc, grâce au théorème de Bézout, qu'il existe un nombre k tel que $10k = 1 \bmod d$). De $10^i = 10^{i+j} \bmod d$, on passe donc à $1 = 10^j \bmod d$, qui signifie que la période commence juste après la virgule et que la longueur de la période est le plus petit entier j tel que : $1 = 10^j \bmod d$ (c'est-à-dire tel que $10^j - 1$, soit un multiple de d).

À nouveau, cela explique pourquoi à la figure 4, pour 6, 12, 14, on n'a pas de