

3. PETITS CALCULS

$1/3 = 0,3333333... = 0,.[3]$
 $2/3 = 0,6666666... = 0,.[6]$
 $1/6 = 0,1666666... = 0,.[6]$
 $2/6 = 0,3333333... = 0,.[3]$
 $3/6 = 0,5$
 $4/6 = 0,6666666... = 0,.[6]$
 $5/6 = 0,8333333... = 0,.[8]$
 $1/7 = 0,142857142857... = 0,.[142857]$
 $2/7 = 0,285714285714... = 0,.[285714]$
 $3/7 = 0,428571428571... = 0,.[428571]$
 $4/7 = 0,571428571428... = 0,.[571428]$
 $5/7 = 0,714285714285... = 0,.[714285]$
 $6/7 = 0,857142857142... = 0,.[857142]$
 $1/9 = 0,111... = 0,.[1]$
 $2/9 = 0,222... = 0,.[2]$
 $3/9 = 0,333... = 0,.[3]$
 $4/9 = 0,444... = 0,.[4]$
 $5/9 = 0,555... = 0,.[5]$
 $6/9 = 0,666... = 0,.[6]$
 $7/9 = 0,777... = 0,.[7]$
 $8/9 = 0,888... = 0,.[8]$
 $1/11 = 0,090909... = 0,.[09]$
 $2/11 = 0,181818... = 0,.[18]$
 $3/11 = 0,272727... = 0,.[27]$
 $4/11 = 0,363636... = 0,.[36]$
 $5/11 = 0,454545... = 0,.[45]$
 $6/11 = 0,545454... = 0,.[54]$
 $7/11 = 0,636363... = 0,.[63]$
 $8/11 = 0,727272... = 0,.[72]$
 $9/11 = 0,818181... = 0,.[81]$
 $10/11 = 0,909090... = 0,.[90]$
 $1/12 = 0,083333... = 0,.[08]$
 $2/12 = 0,166666... = 0,.[16]$
 $3/12 = 0,25$
 $4/12 = 0,333333... = 0,.[3]$
 $5/12 = 0,416666... = 0,.[41]$
 $6/12 = 0,5$
 $7/12 = 0,583333... = 0,.[58]$
 $8/12 = 0,666666... = 0,.[6]$
 $9/12 = 0,75$
 $10/12 = 0,833333... = 0,.[83]$
 $11/12 = 0,916666... = 0,.[91]$
 $1/13 = 0,.[076923]$
 $2/13 = 0,.[153846]$
 $3/13 = 0,.[230769]$
 $4/13 = 0,.[307692]$
 $5/13 = 0,.[384615]$
 $6/13 = 0,.[461538]$
 $7/13 = 0,.[538461]$
 $8/13 = 0,.[615384]$
 $9/13 = 0,.[692307]$
 $10/13 = 0,.[769230]$
 $11/13 = 0,.[846153]$
 $12/13 = 0,.[923076]$
 En base 2
 $1/9 = 0,000111000111... = 0,.[000111]$
 $3/9 = 0,01010101... = 0,.[10]$

nés. Tous les nombres suivants sont donc des irrationnels :

$0,0550005555000055555500000000...$
 (un 0, deux 5, trois 0, quatre 5, etc.)
 $0,488488884888888884... (un 4, deux 8, un 4, quatre 8, un 4, huit 8, etc.)$
 $0,1234567891011121314... (nombre de Champernowne, constitué par la chaîne des entiers)$
 $0,235791113... (les nombres premiers les uns derrière les autres).$

Le second résultat un peu étonnant qui résulte de la caractérisation des rationnels est que, si l'on découvre qu'un nombre n'est pas rationnel, alors on sait aussitôt, sans rien avoir à calculer, que ses chiffres en base 10 (ou autre) ne sont pas périodiques. Puisque racine de deux n'est pas rationnel (2 n'est pas un quotient de deux carrés parfaits), ses décimales ne sont pas périodiques, de même que ses chiffres en binaire. Même si vous ne savez pas les calculer, même si vous n'en avez jamais calculé aucun, vous savez que, quelle que soit la base de numération utilisée, les chiffres de racine de deux ne sont pas périodiques. Le mathématicien est un magicien qui fait connaître l'infini.

PÉRIODES ÉGALES ET INÉGALES

Étudions maintenant les choses plus systématiquement. Le tableau de la figure 3 indique ce que donnent les divisions des nombres entre 0 et 1, avec un dénominateur inférieur ou égal à 13. Nous avons éliminé les dénominateurs 2, 4, 5, 8 et 10, car nous savons que toutes les fractions avec ces dénominateurs ont des développements finis en base 10.

Surprise : il semble que, pour un dénominateur donné, toutes les fractions qui ne se simplifient pas ont la même longueur de période. Pourrait-on le démontrer ? Oui, et cela va nous entraîner dans des raisonnements un peu plus compliqués que précédemment, mais tel est le prix à payer pour passer d'une constatation empirique à une certitude mathématique.

Pour une fraction n/d non simplifiable et de développement infini, nous supposons n plus petit que d , ce qui revient à ne garder que la partie non entière des fractions. Pensons, pour notre démonstration, à l'opération de division comme nous la posons à l'école

– le premier reste est le reste de la division de $10n$ par d (car on a ajouté un zéro à n pour que d y soit au moins une fois),
 – le second est celui de la division de $100n$ par d , etc.

Les restes ne peuvent pas être tous différents, car ils sont inférieurs à d , donc à un certain moment, on retombera sur un reste déjà obtenu à une étape antérieure i . Soit i et $i+j$ les plus petits

des numéros d'étapes où se produit l'égalité de deux restes. Les nombres i et j sont ceux qui donnent l'endroit où commence la période et sa longueur. Dans le langage de l'arithmétique modulaire, n/d est périodique de période j à partir du chiffre i , si et seulement si i et j sont les plus petits entiers tels que : $n10^i = n10^{i+j} \bmod d$ (rappelons que « $\bmod d$ » signifie qu'on ne garde d'un nombre que son reste après la division par n , ou, exprimé autrement, qu'on revient à zéro quand on arrive à n : $0 = 0 \bmod 3$; $1 = 1 \bmod 3$; $2 = 2 \bmod 3$; $3 = 0 \bmod 3$; $4 = 1 \bmod 3$; $5 = 2 \bmod 3$; $6 = 0 \bmod 3$; etc.)

Exemple. Prenons $1/84$. Si on pose la division, on trouve $1/84 = 0,01[190476]$, on constate que $i = 2$ et $j = 6$.

Vérifions cela par un calcul en arithmétique modulaire :

$10^0 = 1 \bmod 84$
 $10^1 = 10 \bmod 84$
 $10^2 = 100 = 16 \bmod 84$
 $10^3 = 160 = 76 \bmod 84$
 $10^4 = 760 = 4 \bmod 84$
 $10^5 = 40 \bmod 84$
 $10^6 = 400 = 64 \bmod 84$
 $10^7 = 640 = 52 \bmod 84$
 $10^8 = 520 = 16 \bmod 84$

On retombe sur 16 pour $i = 2$ (le début de la période) après $j = 6$ multiplications supplémentaires par 10.

Lorsque n et d n'ont pas de facteurs communs, l'égalité modulaire ci-dessus ne dépend pas de n , car il existe un nombre n' tel que $nn' = 1 \bmod d$ (voir sur la figure 1 le théorème de Bézout), et on multiplie chaque côté de l'égalité modulaire par ce n' , ce qui la simplifie en : $10^i = 10^{i+j} \bmod d$.

Cela est remarquable : toutes les fractions simplifiées ayant le même dénominateur ont un développement ayant la même période et cette période commence au même endroit après la virgule. Toutes les fractions ayant 12 comme dénominateur (voir la figure 3) et ne se simplifiant pas ont un développement dont la période est de longueur 1 qui commence au troisième chiffre après la virgule. De même, la période commune aux fractions de dénominateur 7 est constante (c'est 6).

Si on suppose maintenant que d n'est divisible ni par 2 ni par 5, alors on peut simplifier par 10^i (car cela signifie que d et 10 sont premiers entre eux et donc, grâce au théorème de Bézout, qu'il existe un nombre k tel que $10k = 1 \bmod d$). De $10^i = 10^{i+j} \bmod d$, on passe donc à $1 = 10^j \bmod d$, qui signifie que la période commence juste après la virgule et que la longueur de la période est le plus petit entier j tel que : $1 = 10^j \bmod d$ (c'est-à-dire tel que $10^j - 1$, soit un multiple de d).

À nouveau, cela explique pourquoi à la figure 4, pour 6, 12, 14, on n'a pas de

développement périodique dès le départ, alors que, pour chaque dénominateur 3, 7, 9, 11 ou 13, non seulement la longueur de la période est constante, mais la période commence dès la virgule.

Effectuons une petite vérification sur $7/13 = 0, [538461]$

$$\begin{aligned} 10^0 &= 1 \bmod 13 \\ 10^1 &= 10 \bmod 13 \\ 10^2 &= 9 \bmod 13 \\ 10^3 &= 12 \bmod 13 \\ 10^4 &= 3 \bmod 13 \\ 10^5 &= 4 \bmod 13 \\ 10^6 &= 1 \bmod 13 \end{aligned}$$

Dans le cas de dénominateurs qui sont des nombres premiers autres que 2 et 5 (ce qui assure qu'ils n'ont de facteur commun ni avec leur numérateur ni avec 10), les choses sont particulièrement simples et nettes : si p est un nombre premier autre que 2 et 5, alors toutes les fractions non nulles simplifiées de dénominateur p ont un développement décimal qui est périodique dès la virgule, et dont la longueur de la période est le plus petit nombre j tel que $10^j - 1$ est divisible par p .

LES LONGUES PÉRIODES

Le raisonnement sur les restes successifs, quand on pose l'opération de division, montre que, pour un dénominateur d , la période est au plus $d - 1$ (les restes qui peuvent intervenir sont tous les nombres non nuls inférieurs à d). Si un nombre n'est pas premier, la période est inférieure à $d - 1$. En effet, deux cas sont possibles :
(i) un des restes successifs est un diviseur de d , on est ramené à une fraction simplifiée avec un dénominateur plus petit que d , et donc sa période est inférieure à d ;
(ii) aucun des restes successifs n'est un diviseur de d , alors il y en a moins que $d - 1$, et donc la période est inférieure à $d - 1$.

Pour les dénominateurs premiers, on constate avec 7, 17 ou 19 que la période peut-être $p - 1$ (voir la figure 4). D'autres considérations d'arithmétique montrent que, lorsque p est un nombre premier, la longueur des cycles est toujours un diviseur de $p - 1$. On le vérifie en regardant le tableau de la figure 5.

Reste un mystère. Pourquoi la période est-elle maximale, et égale à $(p - 1)$, pour certains nombres premiers appelés *nombres premiers longs* en base 10, et pas pour les autres ? Notons bien que la notion de *nombre premier long* dépend de la base de numération : un nombre peut être un premier long en base 10 et pas en base 2. C'est le cas, par exemple, pour 7 :

$1/7 = 0,142857142857142857... \text{ en base } 10$ période maximale 6

$1/7 = 0,001001001001001... \text{ en base } 2$ période 3

On montre que, pour tout nombre premier, il existe une base B inférieure à p dans laquelle p est un nombre premier long.

Y a-t-il beaucoup de nombres premiers longs en base 10 (ou autres) ? La question est réellement difficile, et les mathématiciens n'ont pas même réussi à établir qu'il existe une infinité de nombres premiers longs en base 10. Or, ceux-ci ne sont pas très rares, puisqu'on en trouve

116 sur les 303 nombres premiers inférieurs à 2 000, ce qui fait une proportion de 38,28 pour cent.

On conjecture d'ailleurs que leur proportion est 37 pour cent. La conjecture a été formulée par le mathématicien allemand Emil Artin (1898-1962) et suggère que la proportion de nombres premiers longs soit C , la constante de Artin (voir la figure 7).

4. CYCLES DES FRACTIONS

Tableau des cycles pour les nombres premiers inférieurs à 50

3 : [3] [6]
7 : [142857]
11 : [09] [18] [26] [37] [45]
13 : [076923] [153846]
17 : [0588235294117647]
19 : [052631578947368421]
23 : [0434782608695652173913]
29 : [0344827586206896551724137931]
31 : [032258064516129] [096774193548387]
37 : [027] [054] [081] [135] [162] [189] [243] [297] [378] [459] [486] [567]
41 : [02439] [04878] [07317] [09756] [12195] [14634] [26829] [36585]
43 : [023255813953488372093] [046511627906976744186]
47 : [0425531914893617021276595744680851063829787234]

Tableau des longueurs des périodes pour les nombres premiers

Nombre premier (sauf 2 et 5) : n . Nombre de cycles : c . Longueur des cycles : l .

n	3	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	101	103	107	109	113	127	131	137
c	2	1	5	2	1	1	1	1	2	12	8	2	1	4	1	1	2	2	9	6	2	2	1	25	3	2	1	1	3	1	17
l	1	6	2	6	16	18	22	28	15	3	5	21	46	13	58	60	33	35	8	13	41	44	96	4	34	53	108	112	42	130	8

5. TROIS CURIOSITÉS NUMÉRIQUES

1) Lorsque p est un nombre premier et que la période de $1/p$ est paire, alors, en additionnant les deux moitiés de la période, on ne trouve que des 9. Ainsi pour 13, on a les périodes 076923 et 153846, et l'on vérifie que :
 $076 + 923 = 999$ $153 + 846 = 999$. Pour 19 on a une unique période :
052631578947368421, et l'on constate que :
 $052631579 + 947368421 = 999999999$

2) À partir de tout nombre premier long p , en prenant sa période, vous créez un entier qui, lorsque vous le multipliez par 2, 3, ..., $p - 1$, se redonne lui-même, à une permutation près de ses chiffres (un tel nombre est parfois appelé *entier cyclique*). Le cycle 142857 du nombre premier long 7 est le plus petit de ces entiers :

$$142857 \times 1 = 142857 \quad 142857 \times 2 = 285714$$

$$142857 \times 3 = 428571 \quad 142857 \times 4 = 571428$$

$$142857 \times 5 = 714285 \quad 142857 \times 6 = 857142$$

De plus, en le multipliant par 7, on obtient 999999

Pour 17, vous trouverez l'entier cyclique 0588235294117647.

3) En prenant un nombre premier p dont la période est de longueur $(p - 1)/2$ (par exemple $p = 13$), vous obtenez une paire de nombres associés : en multipliant l'un ou l'autre par 1, 2, ..., $p - 1$, vous trouvez l'un ou l'autre à une permutation de chiffres près. Les deux cycles donnés par 13 fournissent les nombres associés 076923 et 153846

$$076923 \times 2 = 153846 \quad 153846 \times 2 = 307692$$

$$076923 \times 3 = 230769 \quad 153846 \times 3 = 461538$$

$$076923 \times 4 = 307692 \quad 153846 \times 4 = 615384$$

$$076923 \times 5 = 384615 \quad 153846 \times 5 = 769230, \text{ etc...}$$