

développement périodique dès le départ, alors que, pour chaque dénominateur 3, 7, 9, 11 ou 13, non seulement la longueur de la période est constante, mais la période commence dès la virgule.

Effectuons une petite vérification sur $7/13 = 0,538461$

$$10^0 = 1 \bmod 13$$

$$10^1 = 10 \bmod 13$$

$$10^2 = 9 \bmod 13$$

$$10^3 = 12 \bmod 13$$

$$10^4 = 3 \bmod 13$$

$$10^5 = 4 \bmod 13$$

$$10^6 = 1 \bmod 13$$

Dans le cas de dénominateurs qui sont des nombres premiers autres que 2 et 5 (ce qui assure qu'ils n'ont de facteur commun ni avec leur numérateur ni avec 10), les choses sont particulièrement simples et nettes : si p est un nombre premier autre que 2 et 5, alors toutes les fractions non nulles simplifiées de dénominateur p ont un développement décimal qui est périodique dès la virgule, et dont la longueur de la période est le plus petit nombre j tel que $10^j - 1$ est divisible par p .

LES LONGUES PÉRIODES

Le raisonnement sur les restes successifs, quand on pose l'opération de division, montre que, pour un dénominateur d , la période est au plus $d - 1$ (les restes qui peuvent intervenir sont tous les nombres non nuls inférieurs à d). Si un nombre n'est pas premier, la période est inférieure à $d - 1$. En effet, deux cas sont possibles : (i) un des restes successifs est un diviseur de d , on est ramené à une fraction simplifiée avec un dénominateur plus petit que d , et donc sa période est inférieure à d ; (ii) aucun des restes successifs n'est un diviseur de d , alors il y en a moins que $d - 1$, et donc la période est inférieure à $d - 1$.

Pour les dénominateurs premiers, on constate avec 7, 17 ou 19 que la période peut-être $p - 1$ (voir la figure 4). D'autres considérations d'arithmétique montrent que, lorsque p est un nombre premier, la longueur des cycles est toujours un diviseur de $p - 1$. On le vérifie en regardant le tableau de la figure 5.

Reste un mystère. Pourquoi la période est-elle maximale, et égale à $(p - 1)$, pour certains nombres premiers appelés *nombres premiers longs* en base 10, et pas pour les autres ? Notons bien que la notion de *nombre premier long* dépend de la base de numération : un nombre peut être un premier long en base 10 et pas en base 2. C'est le cas, par exemple, pour 7 :

$1/7 = 0,142857142857142857...$ en base 10 période maximale 6

$1/7 = 0,001001001001001...$ en base 2 période 3

On montre que, pour tout nombre premier, il existe une base B inférieure à p dans laquelle p est un nombre premier long.

Y a-t-il beaucoup de nombres premiers longs en base 10 (ou autres) ? La question est réellement difficile, et les mathématiciens n'ont pas même réussi à établir qu'il existe une infinité de nombres premiers longs en base 10. Or, ceux-ci ne sont pas très rares, puisqu'on en trouve

116 sur les 303 nombres premiers inférieurs à 2 000, ce qui fait une proportion de 38,28 pour cent.

On conjecture d'ailleurs que leur proportion est 37 pour cent. La conjecture a été formulée par le mathématicien allemand Emil Artin (1898-1962) et suggère que la proportion de nombres premiers longs soit C , la constante de Artin (voir la figure 7).

4. CYCLES DES FRACTIONS

Tableau des cycles pour les nombres premiers inférieurs à 50

3 :	[3] [6]
7 :	[142857]
11 :	[09] [18] [26] [37] [45]
13 :	[076923] [153846]
17 :	[0588235294117647]
19 :	[052631578947368421]
23 :	[0434782608695652173913]
29 :	[0344827586206896551724137931]
31 :	[032258064516129] [096774193548387]
37 :	[027] [054] [081] [135] [162] [189] [243] [297] [378] [459] [486] [567]
41 :	[02439] [04878] [07317] [09756] [12195] [14634] [26829] [36585]
43 :	[023255813953488372093] [046511627906976744186]
47 :	[0425531914893617021276595744680851063829787234]

Tableau des longueurs des périodes pour les nombres premiers

Nombre premier (sauf 2 et 5) : n . Nombre de cycles : c . Longueur des cycles : l .

n	3	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	101	103	107	109	113	127	131	137
c	1	1	2	1	1	1	1	2	12	8	2	1	4	1	1	2	2	9	6	2	2	1	25	3	2	1	1	1	3	1	17
l	1	6	2	6	16	18	22	28	15	3	5	21	46	13	58	60	33	35	8	13	41	44	96	4	34	53	108	112	42	130	8

5. TROIS CURIOSITÉS NUMÉRIQUES

1) Lorsque p est un nombre premier et que la période de $1/p$ est paire, alors, en additionnant les deux moitiés de la période, on ne trouve que des 9. Ainsi pour 13, on a les périodes 076923 et 153846, et l'on vérifie que : $076 + 923 = 999$ $153 + 846 = 999$. Pour 19 on a une unique période : 052631578947368421, et l'on constate que : $052631579 + 947368421 = 999999999$

2) À partir de tout nombre premier long p , en prenant sa période, vous créez un entier qui, lorsque vous le multipliez par 2, 3, ..., $p - 1$, se redonne lui-même, à une permutation près de ses chiffres (un tel nombre est parfois appelé entier cyclique). Le cycle 142857 du nombre premier long 7 est le plus petit de ces entiers :

$$142857 \times 1 = 142857 \quad 142857 \times 2 = 285714$$

$$142857 \times 3 = 428571 \quad 142857 \times 4 = 571428$$

$$142857 \times 5 = 714285 \quad 142857 \times 6 = 857142$$

De plus, en le multipliant par 7, on obtient 999999

Pour 17, vous trouverez l'entier cyclique 0588235294117647.

3) En prenant un nombre premier p dont la période est de longueur $(p - 1)/2$ (par exemple $p = 13$), vous obtenez une paire de nombres associés : en multipliant l'un ou l'autre par 1, 2, ..., $p - 1$, vous trouvez l'un ou l'autre à une permutation de chiffres près. Les deux cycles donnés par 13 fournissent les nombres associés 076923 et 153846

$$076923 \times 2 = 153846 \quad 153846 \times 2 = 307692$$

$$076923 \times 3 = 230769 \quad 153846 \times 3 = 461538$$

$$076923 \times 4 = 307692 \quad 153846 \times 4 = 615384$$

$$076923 \times 5 = 384615 \quad 153846 \times 5 = 769230, \text{ etc.}$$