

se trouvent exactement au centre du piège avec une énergie exactement nulle ; nous ne pouvons avoir ces deux informations simultanément.

Selon la théorie d'Einstein, les atomes du condensat ont l'énergie minimale, alors que la relation d'Heisenberg leur interdit d'être exactement au centre du piège. La mécanique quantique résout cette contradiction apparente en postulant que l'énergie d'un atome dans une enceinte quelconque, y compris dans notre piège, ne prend qu'un ensemble discret de valeurs possibles et que la valeur minimale n'est pas nulle. Cette énergie minimale est nommée énergie de point zéro : c'est celle des atomes à température nulle. Les atomes ayant cette énergie se déplacent lentement au voisinage du centre du piège, et non pas exactement au centre. Habituellement, les effets de la relation d'indétermination et de la mécanique quantique ne sont visibles que pour les objets de la taille d'un atome ou encore plus petits. La condensation de Bose-Einstein est l'une des rares manifestations macroscopiques de la relation d'indétermination.

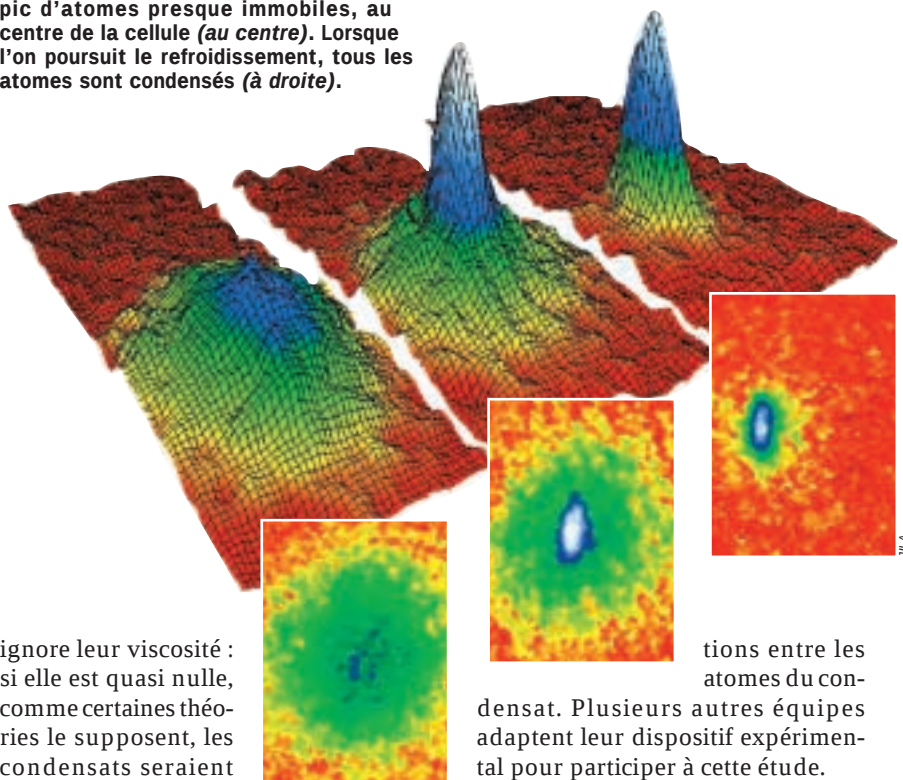
L'ultime précision

L'observation de la condensation de Bose-Einstein est encore trop récente pour que l'on envisage des applications, mais spéculons à l'aide d'une analogie physique : les atomes d'un condensat ressemblent aux photons d'un faisceau laser.

Tous les photons d'un faisceau laser se propagent exactement dans la même direction, et ils ont exactement la même fréquence et la même phase. Ils forment ainsi un faisceau facile à commander et à utiliser dans les lecteurs de disques compacts, dans les imprimantes laser, etc. De même, le condensat de Bose-Einstein est un groupe parfaitement homogène d'atomes que l'on peut réfléchir, focaliser, diffracter, moduler en fréquence et en amplitude. Ce type de manipulation conduira à une meilleure définition du temps (aujourd'hui, les horloges les plus précises utilisent déjà des atomes refroidis par laser). On pourrait aussi imaginer un faisceau d'atomes focalisé en une tache d'un micromètre de diamètre gravant un transistor directement sur un circuit intégré.

Les condensats de Bose-Einstein demeurent mal connus. Ils se comportent comme des fluides, mais on

5. L'ABSORPTION DE LA LUMIÈRE D'UN LASER par un condensat de Bose-Einstein en cours de formation a été enregistrée et traitée par ordinateur, de sorte qu'apparaissent la vitesse des atomes. Les deux rangées d'images correspondent aux mêmes données vues sous des angles différents. En haut, l'élévation de la surface est d'autant plus importante que la densité des atomes est grande et que leur vitesse est faible. Avant la formation du condensat (à gauche), le nuage est à une température d'environ 200 milliardièmes de kelvin, et les vitesses sont assez homogènes. Lorsque l'on refroidit jusqu'à 100 milliardièmes de kelvin, le condensat apparaît sous la forme d'un pic d'atomes presque immobiles, au centre de la cellule (au centre). Lorsque l'on poursuit le refroidissement, tous les atomes sont condensés (à droite).



ignore leur viscosité : si elle est quasi nulle, comme certaines théories le supposent, les condensats seraient des sortes de «super-gaz» où des remous produits par excitation ne s'amortiraient jamais.

Plusieurs groupes ont commencé à caractériser les condensats. Le groupe de W. Ketterle a déjà montré que le recouvrement spatial de deux condensats forme un réseau de franges provenant d'interférences constructives et destructives : dans le nuage d'atomes, ces franges sont des zones de densité alternativement forte et faible. En appliquant à un condensat piégé par de la lumière un faible champ magnétique, ils ont en outre modifié les interac-

tions entre les atomes du condensat. Plusieurs autres équipes adaptent leur dispositif expérimental pour participer à cette étude.

Peut-on condenser autre chose que des atomes, des molécules par exemple ? La difficulté réside dans l'impossibilité de refroidir des molécules par laser. Toutefois, certains ont imaginé un mécanisme, nommé «refroidissement sympathique», qui permettrait la formation d'un tel condensat : on mélange des molécules à des atomes «condensables», comme le rubidium. En refroidissant ces derniers, et pour peu que les collisions entre les molécules et les atomes soient suffisamment fréquentes, on refroidit l'ensemble, et on aboutirait à un condensat moléculaire.

Eric CORNELL et Carl WIEMAN travaillent à l'Institut pour l'astrophysique de laboratoire (JILA), à Boulder (Colorado).

William D. PHILLIPS et Claude COHEN-TANNOUDJI, *New Mechanisms for Laser Cooling*, in *Physics Today*, vol. 43, pp. 33-40, octobre 1990.

Bose-Einstein Condensation, sous la direction de A. Griffin, D.W. Snoke et S. Stringari, Cambridge University Press, 1995.

M.H. ANDERSON, J.R. ENSHER, M.R. MATTHEWS, C.E. WIEMAN et

E.A. CORNELL, *Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor*, in *Science*, vol. 269, pp. 198-201, 14 juillet 1995.

M.R. ANDREWS, C.G. TOWNSEND, H.-J. MIESNER, D.S. DURFEE, D.M. KURN et W. KETTERLE, *Observation of Interference between Two Bose Condensates*, in *Science*, vol. 275, pp. 637-641, 31 janvier 1997.

De nombreux liens complémentaires sont disponibles sur notre site Web : <http://www.pourlascience.com>



La conjecture de Syracuse

JEAN-PAUL DELAHAYE

Le plus simple des problèmes mathématiques non résolus illustre la démarche des chercheurs.

Les sciences résolvent les questions élémentaires, puis passent à d'autres plus compliquées, progressant petit à petit. Le pédagogue défend aussi cette idée d'apprentissage graduel : «L'ontogenèse de l'apprentissage suit la phylogenèse des découvertes», pense-t-il : l'élève traite les cas simples et anciens, puis lentement passe aux cas difficiles.

Hélas, le monde mathématique ne se plie pas à cette vision d'une armée de chercheurs laborieux avançant selon un plan fixé sur un front de difficultés : il est des passages étroits où l'on ne peut maintenir l'allure. Pire, la plaine est semée de murailles invisibles dont on ne découvre l'existence qu'en s'y cognant.

La conjecture de Syracuse est une de ces murailles sur laquelle la communauté mathématique a buté (avec amusement d'abord, avec agacement ensuite) et, pour l'instant, aucun alpiniste n'a su la gravir. Le problème est de formulation si simple qu'il semble étonnant que personne n'ait pu le résoudre : quand vous aurez

lu cet article, vous serez au même point que les plus grands mathématiciens, ce qui n'est pas une piètre satisfaction.

Détaillons la règle du jeu. Prenez un entier, n ; s'il est pair, vous le divisez par 2, s'il est impair, vous le multipliez par 3 et vous ajoutez 1. Vous recommencez cette opération avec le résultat obtenu. Prenons un exemple : partant de 10, vous passez à 5, puis à 16 ($3 \times 5 + 1$), puis à 8, puis à 4, puis à 2, puis à 1, qui vous ramène à 4, 2, 1, cycle dans lequel vous restez alors tout le temps. Au bout du compte, on retombe sur 1. Deux entiers peuvent donner le même résultat (par exemple, 32 et 5 donnent 16, leurs cheminement se rejoignant), ce qui suggère de représenter les divers parcours sous la forme de graphes ou de tableaux.

Essayez d'autres valeurs au hasard, en vous aidant d'un ordinateur si vous voulez. Vous tomberez toujours sur 1. Cette affirmation péremptoire est injustifiée : personne n'a montré qu'on arrive toujours à 1 (d'où le nom de «conjecture de Syracuse» pour cette affirmation).

On a essayé tous les nombres jusqu'à $3,2 \cdot 10^{16}$, et tous aboutissent à 1.

TROUBLES DANS LES ESPRITS

Cette conjecture dont l'origine, vers 1950, reste confuse porte une grande variété d'autres noms provenant de mathématiciens l'ayant étudiée ou fait connaître : problème de Collatz, problème de Kakutani, problème de l'algorithme de Hasse, problème d'Ulam. Le nom de conjecture de Syracuse est lié à l'Université de Syracuse, aux États-Unis, où le problème fut étudié. Le nom le plus souvent retenu aujourd'hui est plus simplement celui de «problème $3x + 1$ ».

S. Kakutani fit circuler le problème et raconte : «Pendant un mois, tout le monde à l'Université de Yale travailla dessus, sans résultat. Un phénomène semblable se produisit à l'Université de Chicago. Cette énigme, pensaient certains, avait été avancée par le KGB pour ralentir la recherche mathématique aux États-Unis.»

1. RÈGLES ET EXEMPLES DU JEU DE SYRACUSE

LA RÈGLE DU JEU :

SI n EST PAIR : DIVISEZ PAR 2
SI n EST IMPAIR : MULTIPLIEZ PAR 3 ET AJOUTEZ 1
RECOMMENCEZ JUSQU'À OBTENIR 1

EXEMPLE : 10

10 DIVISÉ PAR 2 DONNE 5
5 MULTIPLIÉ PAR 3 ET PLUS 1 DONNE 16
16 DIVISÉ PAR 2 DONNE 8
8 DIVISÉ PAR 2 DONNE 4
4 DIVISÉ PAR 2 DONNE 2
2 DIVISÉ PAR 2 DONNE 1.

Pour suivre un vol à droite, on part d'un nombre, on se déplace vers la gauche en restant sur la même ligne autant qu'on peut. Quand on arrive en bout de ligne, on passe à la case au-dessus de la case où l'on est. Si l'entier n est placé dans la i -ème colonne, le nombre d'étapes paires du vol n est i . Le tableau infini contient-il tous les entiers? C'est la conjecture de Syracuse.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384
						21	42	84	168	236	572	1344	2599	5398
				5	10	20	40	80	160	320	640	1280	2560	5120
								53	106	212	424	848	1696	
									35	70	140	280	560	
										23	46	92	184	
											15	30	60	
						13	26	52	104	208	416	832	1664	
							17	34	68	136	272	544		
								11	22	44	88	176		
											29	58		
												19		
										7	14	28	56	
												9	18	
					3	6	12	24	48	96	192	394	788	1576