



La conjecture de Syracuse

JEAN-PAUL DELAHAYE

Le plus simple des problèmes mathématiques non résolus illustre la démarche des chercheurs.

Les sciences résolvent les questions élémentaires, puis passent à d'autres plus compliquées, progressant petit à petit. Le pédagogue défend aussi cette idée d'apprentissage graduel : «L'ontogenèse de l'apprentissage suit la phylogenèse des découvertes», pense-t-il : l'élève traite les cas simples et anciens, puis lentement passe aux cas difficiles.

Hélas, le monde mathématique ne se plie pas à cette vision d'une armée de chercheurs laborieux avançant selon un plan fixé sur un front de difficultés : il est des passages étroits où l'on ne peut maintenir l'allure. Pire, la plaine est semée de murailles invisibles dont on ne découvre l'existence qu'en s'y cognant.

La *conjecture de Syracuse* est une de ces murailles sur laquelle la communauté mathématique a buté (avec amusement d'abord, avec agacement ensuite) et, pour l'instant, aucun alpiniste n'a su la gravir. Le problème est de formulation si simple qu'il semble étonnant que personne n'ait pu le résoudre : quand vous aurez

lu cet article, vous serez au même point que les plus grands mathématiciens, ce qui n'est pas une piètre satisfaction.

Détaillons la règle du jeu. Prenez un entier, n ; s'il est pair, vous le divisez par 2, s'il est impair, vous le multipliez par 3 et vous ajoutez 1. Vous recommencez cette opération avec le résultat obtenu. Prenons un exemple : partant de 10, vous passez à 5, puis à 16 ($3 \times 5 + 1$), puis à 8, puis à 4, puis à 2, puis à 1, qui vous ramène à 4, 2, 1, cycle dans lequel vous restez alors tout le temps. Au bout du compte, on retombe sur 1. Deux entiers peuvent donner le même résultat (par exemple, 32 et 5 donnent 16, leurs cheminement se rejoignant), ce qui suggère de représenter les divers parcours sous la forme de graphes ou de tableaux.

Essayez d'autres valeurs au hasard, en vous aidant d'un ordinateur si vous voulez. *Vous tomberez toujours sur 1.* Cette affirmation péremptoire est injustifiée : personne n'a montré qu'on arrive toujours à 1 (d'où le nom de «conjecture de Syracuse» pour cette affirmation).

On a essayé tous les nombres jusqu'à $3,2 \cdot 10^{16}$, et tous aboutissent à 1.

TROUBLES DANS LES ESPRITS

Cette conjecture dont l'origine, vers 1950, reste confuse porte une grande variété d'autres noms provenant de mathématiciens l'ayant étudiée ou fait connaître : problème de Collatz, problème de Kakutani, problème de l'algorithme de Hasse, problème d'Ulam. Le nom de conjecture de Syracuse est lié à l'Université de Syracuse, aux États-Unis, où le problème fut étudié. Le nom le plus souvent retenu aujourd'hui est plus simplement celui de «problème $3x + 1$ ».

S. Kakutani fit circuler le problème et raconte : «Pendant un mois, tout le monde à l'Université de Yale travailla dessus, sans résultat. Un phénomène semblable se produisit à l'Université de Chicago. Cette énigme, pensaient certains, avait été avancée par le KGB pour ralentir la recherche mathématique aux États-Unis.»

1. RÈGLES ET EXEMPLES DU JEU DE SYRACUSE

LA RÈGLE DU JEU :

SI N EST PAIR : DIVISEZ PAR 2
SI N EST IMPAIR : MULTIPLIEZ
PAR 3 ET AJOUTEZ 1
RECOMMENCEZ
JUSQU'À OBTENIR 1

EXEMPLE : 10

10 DIVISÉ PAR 2 DONNE 5
5 MULTIPLIÉ PAR 3 ET PLUS 1
DONNE 16
16 DIVISÉ PAR 2 DONNE 8
8 DIVISÉ PAR 2 DONNE 4
4 DIVISÉ PAR 2 DONNE 2
2 DIVISÉ PAR 2 DONNE 1.

Pour suivre un vol à droite, on part d'un nombre, on se déplace vers la gauche en restant sur la même ligne autant qu'on peut. Quand on arrive en bout de ligne, on passe à la case au-dessus de la case où l'on est. Si l'entier n est placé dans la i -ème colonne, le nombre d'étapes paires du vol n est i . Le tableau infini contient-il tous les entiers? C'est la conjecture de Syracuse.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384
						21	42	84	168	236	572	1344	2599	5398
				5	10	20	40	80	160	320	640	1280	2560	5120
									53	106	212	424	848	1696
										35	70	140	280	560
											23	46	92	184
												15	30	60
							13	26	52	104	208	416	832	1664
								17	34	68	136	272	544	
									11	22	44	88	176	
												29	58	
													19	
										7	14	28	56	
												9	18	
					3	6	12	24	48	96	192	394	788	1576