



La conjecture de Syracuse

JEAN-PAUL DELAHAYE

Le plus simple des problèmes mathématiques non résolus illustre la démarche des chercheurs.

Les sciences résolvent les questions élémentaires, puis passent à d'autres plus compliquées, progressant petit à petit. Le pédagogue défend aussi cette idée d'apprentissage graduel : «L'ontogenèse de l'apprentissage suit la phylogenèse des découvertes», pense-t-il : l'élève traite les cas simples et anciens, puis lentement passe aux cas difficiles.

Hélas, le monde mathématique ne se plie pas à cette vision d'une armée de chercheurs laborieux avançant selon un plan fixé sur un front de difficultés : il est des passages étroits où l'on ne peut maintenir l'allure. Pire, la plaine est semée de murailles invisibles dont on ne découvre l'existence qu'en s'y cognant.

La *conjecture de Syracuse* est une de ces murailles sur laquelle la communauté mathématique a buté (avec amusement d'abord, avec agacement ensuite) et, pour l'instant, aucun alpiniste n'a su la gravir. Le problème est de formulation si simple qu'il semble étonnant que personne n'ait pu le résoudre : quand vous aurez

lu cet article, vous serez au même point que les plus grands mathématiciens, ce qui n'est pas une piètre satisfaction.

Détaillons la règle du jeu. Prenez un entier, n ; s'il est pair, vous le divisez par 2, s'il est impair, vous le multipliez par 3 et vous ajoutez 1. Vous recommencez cette opération avec le résultat obtenu. Prenons un exemple : partant de 10, vous passez à 5, puis à 16 ($3 \times 5 + 1$), puis à 8, puis à 4, puis à 2, puis à 1, qui vous ramène à 4, 2, 1, cycle dans lequel vous restez alors tout le temps. Au bout du compte, on retombe sur 1. Deux entiers peuvent donner le même résultat (par exemple, 32 et 5 donnent 16, leurs cheminement se rejoignant), ce qui suggère de représenter les divers parcours sous la forme de graphes ou de tableaux.

Essayez d'autres valeurs au hasard, en vous aidant d'un ordinateur si vous voulez. *Vous tomberez toujours sur 1.* Cette affirmation péremptoire est injustifiée : personne n'a montré qu'on arrive toujours à 1 (d'où le nom de «conjecture de Syracuse» pour cette affirmation).

On a essayé tous les nombres jusqu'à $3,2 \cdot 10^{16}$, et tous aboutissent à 1.

TROUBLES DANS LES ESPRITS

Cette conjecture dont l'origine, vers 1950, reste confuse porte une grande variété d'autres noms provenant de mathématiciens l'ayant étudiée ou fait connaître : problème de Collatz, problème de Kakutani, problème de l'algorithme de Hasse, problème d'Ulam. Le nom de conjecture de Syracuse est lié à l'Université de Syracuse, aux États-Unis, où le problème fut étudié. Le nom le plus souvent retenu aujourd'hui est plus simplement celui de «problème $3x + 1$ ».

S. Kakutani fit circuler le problème et raconte : «Pendant un mois, tout le monde à l'Université de Yale travailla dessus, sans résultat. Un phénomène semblable se produisit à l'Université de Chicago. Cette énigme, pensaient certains, avait été avancée par le KGB pour ralentir la recherche mathématique aux États-Unis.»

1. RÈGLES ET EXEMPLES DU JEU DE SYRACUSE

LA RÈGLE DU JEU :

SI N EST PAIR : DIVISEZ PAR 2
SI N EST IMPAIR : MULTIPLIEZ PAR 3 ET AJOUTEZ 1
RECOMMENCEZ JUSQU'À OBTENIR 1

EXEMPLE : 10

10 DIVISÉ PAR 2 DONNE 5
5 MULTIPLIÉ PAR 3 ET PLUS 1 DONNE 16
16 DIVISÉ PAR 2 DONNE 8
8 DIVISÉ PAR 2 DONNE 4
4 DIVISÉ PAR 2 DONNE 2
2 DIVISÉ PAR 2 DONNE 1.

Pour suivre un vol à droite, on part d'un nombre, on se déplace vers la gauche en restant sur la même ligne autant qu'on peut. Quand on arrive en bout de ligne, on passe à la case au-dessus de la case où l'on est. Si l'entier n est placé dans la i -ème colonne, le nombre d'étapes paires du vol n est i . Le tableau infini contient-il tous les entiers? C'est la conjecture de Syracuse.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384
						21	42	84	168	236	572	1344	2599	5398
				5	10	20	40	80	160	320	640	1280	2560	5120
								53	106	212	424	848	1696	
									35	70	140	280	560	
										23	46	92	184	
											15	30	60	
						13	26	52	104	208	416	832	1664	
							17	34	68	136	272	544		
								11	22	44	88	176		
											29	58		
													19	
										7	14	28	56	
												9	18	
					3	6	12	24	48	96	192	394	788	1576

2. LES 30 PREMIERS VOLS

VOL	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
DURÉE	0	1	7	2	5	8	16	3	19	6	14	9	9	17	17	4	12	20	20	7	7	15	15	10	23	10	111	18	18	18
DURÉE DE VOL EN ALTITUDE	0	0	5	0	2	0	10	0	2	0	7	0	2	0	10	0	2	0	5	0	2	0	7	0	2	0	95	0	2	0
ALTITUDE MAXIMALE	1	2	16	4	16	16	52	8	52	16	52	16	40	52	160	16	52	52	88	20	64	52	160	24	88	40	9232	52	88	160

La conjecture de Syracuse a donné lieu à des publications rattachées au domaine de la théorie des nombres. Ces travaux ont pris une tournure très sérieuse, conduisant à certains résultats que nous allons examiner. Cependant, on ne sait toujours pas répondre à la question : «Arrive-t-on toujours sur 1?»

Que peut-il se produire d'autre ? Partant d'un entier quelconque, *a priori* trois cas sont possibles :

- on aboutit à 1 (c'est-à-dire sur le cycle $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$) ;
- on aboutit à un autre cycle que $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$;

- on tombe sur une suite infinie de nombres entiers ne revenant jamais là où elle est passée, et prenant donc des valeurs de plus en plus grandes. N'importe quel amateur peut tenter sa chance, mais il doit savoir que des gens intelligents (parfois géniaux) ont essayé et s'y sont cassé les dents : si vous croyez, après quelques heures de recherche, avoir trouvé un raisonnement qui démontre la conjecture, rédigez-le soigneusement. Toutefois, méfiez-vous : nombre de fausses preuves ont déjà circulé, dont une en 1997 sur Internet. Cette année, une preuve a été déposée chez un notaire par un mathématicien amateur inquiet qu'on ne lui vole son idée.

Il y a une vingtaine d'années, le grand mathématicien Paul Erdős, qu'on interrogeait sur ce problème et sur l'impuissance des mathématiques à le traiter malgré sa déconcertante simplicité, répondit que «les mathématiques ne sont pas encore prêtes pour aborder de telles questions». Est-ce toujours le cas aujourd'hui ?

DURÉE DE VOL, ALTITUDE, VOL EN ALTITUDE, ETC.

À défaut de prouver le résultat et pour tenter de trouver un contre-exemple (après tout, peut-être que tout entier n'arrive pas sur 1!), de nombreux calculs ont conduit à des records soigneusement tenus à jour et auxquels il est plus facile de s'attaquer qu'à la conjecture elle-même. L'étude des particularités du processus est motivée par l'espoir que la démonstration d'une propriété équivalente permettra de

démontrer la conjecture... Avant d'indiquer des records, fixons un vocabulaire imagé qui nous facilitera la description des comportements des suites.

Nous dirons, dans ce qui suit, que la suite obtenue à partir d'un entier est son *vol*. Ce vol atteint une *altitude maximale*, qui est l'entier le plus grand par lequel on passe. Ce vol a une *durée* égale au nombre d'étapes avant d'*atterrir* à 1. Nous examinerons aussi la *durée de vol en altitude*, la durée du vol dont les points de la suite sont supérieurs à la valeur du point de départ. Le vol numéro 11 est ainsi : $11 \rightarrow 34 \rightarrow 17 \rightarrow 52 \rightarrow 26 \rightarrow 13 \rightarrow 40 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$. Son altitude maximale est 52, sa durée de vol 14, et sa durée de vol en altitude 7 (voir la figure 3).

Remarquons qu'il existe des vols de durée aussi longue qu'on veut : le vol 2^n est $2^n \rightarrow 2^{n-1} \rightarrow 2^{n-2} \rightarrow 2^{n-3} \rightarrow \dots \rightarrow 2 \rightarrow 1$, qui a pour durée n . Les mathématiciens ont aussi démontré que, si tout nombre a une durée de vol en altitude finie, alors la conjecture de Syracuse est vraie (voir la figure 4).

Le record de vérification de la conjecture, nous l'avons mentionné, est $3,2 \cdot 10^{16}$, ce qui signifie que tous les vols dont le numéro est inférieur à $3,2 \cdot 10^{16}$ atterrissent en 1. Ce résultat est dû à Tomás Oliveira e Silva, de l'Université d'Aveiro, au Portugal, qui a développé des trésors d'ingéniosité pour mener les calculs.

On appelle *vol de durée record* un vol dont tous les vols de numéro plus petits sont plus courts. Le vol 7, dont la durée est 16, est un vol de durée record, car les vols 1, 2, 3, 4, 5 et 6 ont des durées inférieures. Aujourd'hui, le plus grand vol de durée record publié (par Eric Roosendaal) est le 109^e : il s'agit du vol 100759293214567, dont la durée est 1 820.

On considère de même les *vols de durée en altitude record* (tout vol de numéro plus petit reste en altitude moins longtemps). On en a trouvé 28, dont le plus grand publié (par E. Roosendaal) est le vol 70665924117439, qui reste en altitude 1 177 étapes.

Les *vols d'altitude record* sont ceux qui atteignent un maximum d'altitude

qu'aucun vol de numéro inférieur n'atteint. On en connaît 69, dont le dernier publié (par E. Roosendaal) est le vol 406738920960667, qui atteint l'altitude : 2560139341004245682288523934.

On démontre que le nombre $P(N)$ d'étapes paires du vol N et le nombre $I(N)$ d'étapes impaires vérifient toujours : $I(N)/P(N) < \log 2 / \log 3$. On remarque que, pour certains nombres N , le rapport $I(N)/P(N)$ s'approche de $\log 2 / \log 3 = 0,63092975\dots$ On conjecture qu'on s'en approche de plus en plus. Cela suggère de repérer les *records d'approche* : nombre N tel que le rapport $I(N)/P(N)$ est plus grand que le rapport $I(n)/P(n)$ pour toutes les valeurs de n inférieures à N .

Ces records d'approche sont rares : seuls 15 sont connus aujourd'hui, dont le dernier est $N = 100759293214567$, qui donne $I(N)/P(N) = 0,604938$.

On sait que, pour tout entier p , il existe au moins un vol de durée p : le vol 2^p . En général, il en existe d'autres, et trouver celui qui a le plus petit numéro n'est pas facile. Un défi a été lancé pour l'an 2000 : trouver le plus petit entier n dont la durée de vol est 2000. Actuellement, c'est 377060271667498687, mais rien n'assure qu'il n'y a pas mieux.

En programmation, l'intelligence est utile, et les résultats obtenus avec les plus puissantes machines peuvent être battus par un ordinateur personnel astucieusement programmé. Voici quelques idées conduisant à gagner du temps dans la recherche d'un contre-exemple et utiles pour battre les records mentionnés.

Pour établir que tout vol inférieur à n atterrit en 1, il n'est pas nécessaire de mener le calcul jusqu'à 1 : on peut arrêter chaque vol dès qu'il passe en dessous de son point de départ x (car si, avant x , on a testé tous les vols de numéros inférieurs, on est alors certain que le vol x , une fois arrivé sous x , se poursuivra jusqu'à 1). On arrête aussi le calcul dès qu'on trouve un nombre déjà atteint par un vol précédent (pour le savoir, on doit mémoriser les nombres par lesquels on est déjà passé, ce qui doit se faire intelligemment pour que le procédé soit économique).

Plus intéressantes encore sont les remarques mathématiques du type :