

2. LES 30 PREMIERS VOLS

VOL	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
DURÉE	0	1	7	2	5	8	16	3	19	6	14	9	9	17	17	4	12	20	20	7	7	15	15	10	23	10	111	18	18	18
DURÉE DE VOL EN ALTITUDE	0	0	5	0	2	0	10	0	2	0	7	0	2	0	10	0	2	0	5	0	2	0	7	0	2	0	95	0	2	0
ALTITUDE MAXIMALE	1	2	16	4	16	16	52	8	52	16	52	16	40	52	160	16	52	52	88	20	64	52	160	24	88	40	9232	52	88	160

La conjecture de Syracuse a donné lieu à des publications rattachées au domaine de la théorie des nombres. Ces travaux ont pris une tournure très sérieuse, conduisant à certains résultats que nous allons examiner. Cependant, on ne sait toujours pas répondre à la question : «Arrive-t-on toujours sur 1?»

Que peut-il se produire d'autre ? Partant d'un entier quelconque, *a priori* trois cas sont possibles :

- on aboutit à 1 (c'est-à-dire sur le cycle $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$) ;

- on aboutit à un autre cycle que $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$;

- on tombe sur une suite infinie de nombres entiers ne revenant jamais là où elle est passée, et prenant donc des valeurs de plus en plus grandes. N'importe quel amateur peut tenter sa chance, mais il doit savoir que des gens intelligents (parfois géniaux) ont essayé et s'y sont cassé les dents : si vous croyez, après quelques heures de recherche, avoir trouvé un raisonnement qui démontre la conjecture, rédigez-le soigneusement. Toutefois, méfiez-vous : nombre de fausses preuves ont déjà circulé, dont une en 1997 sur Internet. Cette année, une preuve a été déposée chez un notaire par un mathématicien amateur inquiet qu'on ne lui vole son idée.

Il y a une vingtaine d'années, le grand mathématicien Paul Erdős, qu'on interrogeait sur ce problème et sur l'impuissance des mathématiques à le traiter malgré sa déconcertante simplicité, répondit que «les mathématiques ne sont pas encore prêtes pour aborder de telles questions». Est-ce toujours le cas aujourd'hui ?

DURÉE DE VOL, ALTITUDE, VOL EN ALTITUDE, ETC.

À défaut de prouver le résultat et pour tenter de trouver un contre-exemple (après tout, peut-être que tout entier n'arrive pas sur 1!), de nombreux calculs ont conduit à des records soigneusement tenus à jour et auxquels il est plus facile de s'attaquer qu'à la conjecture elle-même. L'étude des particularités du processus est motivée par l'espoir que la démonstration d'une propriété équivalente permettra de

démontrer la conjecture... Avant d'indiquer des records, fixons un vocabulaire imagé qui nous facilitera la description des comportements des suites.

Nous dirons, dans ce qui suit, que la suite obtenue à partir d'un entier est son *vol*. Ce vol atteint une *altitude maximale*, qui est l'entier le plus grand par lequel on passe. Ce vol a une *durée* égale au nombre d'étapes avant d'*atterrir* à 1. Nous examinerons aussi la *durée de vol en altitude*, la durée du vol dont les points de la suite sont supérieurs à la valeur du point de départ. Le vol numéro 11 est ainsi : $11 \rightarrow 34 \rightarrow 17 \rightarrow 52 \rightarrow 26 \rightarrow 13 \rightarrow 40 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$. Son altitude maximale est 52, sa durée de vol 14, et sa durée de vol en altitude 7 (voir la figure 3).

Remarquons qu'il existe des vols de durée aussi longue qu'on veut : le vol 2^n est $2^n \rightarrow 2^{n-1} \rightarrow 2^{n-2} \rightarrow 2^{n-3} \rightarrow \dots \rightarrow 2 \rightarrow 1$, qui a pour durée n . Les mathématiciens ont aussi démontré que, si tout nombre a une durée de vol en altitude finie, alors la conjecture de Syracuse est vraie (voir la figure 4).

Le record de vérification de la conjecture, nous l'avons mentionné, est $3,2 \cdot 10^{16}$, ce qui signifie que tous les vols dont le numéro est inférieur à $3,2 \cdot 10^{16}$ atterrissent en 1. Ce résultat est dû à Tomás Oliveira e Silva, de l'Université d'Aveiro, au Portugal, qui a développé des trésors d'ingéniosité pour mener les calculs.

On appelle *vol de durée record* un vol dont tous les vols de numéro plus petits sont plus courts. Le vol 7, dont la durée est 16, est un vol de durée record, car les vols 1, 2, 3, 4, 5 et 6 ont des durées inférieures. Aujourd'hui, le plus grand vol de durée record publié (par Eric Roosendaal) est le 109^e : il s'agit du vol 100759293214567, dont la durée est 1 820.

On considère de même les *vols de durée en altitude record* (tout vol de numéro plus petit reste en altitude moins longtemps). On en a trouvé 28, dont le plus grand publié (par E. Roosendaal) est le vol 70665924117439, qui reste en altitude 1 177 étapes.

Les *vols d'altitude record* sont ceux qui atteignent un maximum d'altitude

qu'aucun vol de numéro inférieur n'atteint. On en connaît 69, dont le dernier publié (par E. Roosendaal) est le vol 406738920960667, qui atteint l'altitude : 2560139341004245682288523934.

On démontre que le nombre $P(N)$ d'étapes paires du vol N et le nombre $I(N)$ d'étapes impaires vérifient toujours : $I(N)/P(N) < \log 2 / \log 3$. On remarque que, pour certains nombres N , le rapport $I(N)/P(N)$ s'approche de $\log 2 / \log 3 = 0,63092975\dots$ On conjecture qu'on s'en approche de plus en plus. Cela suggère de repérer les *records d'approche* : nombre N tel que le rapport $I(N)/P(N)$ est plus grand que le rapport $I(n)/P(n)$ pour toutes les valeurs de n inférieures à N .

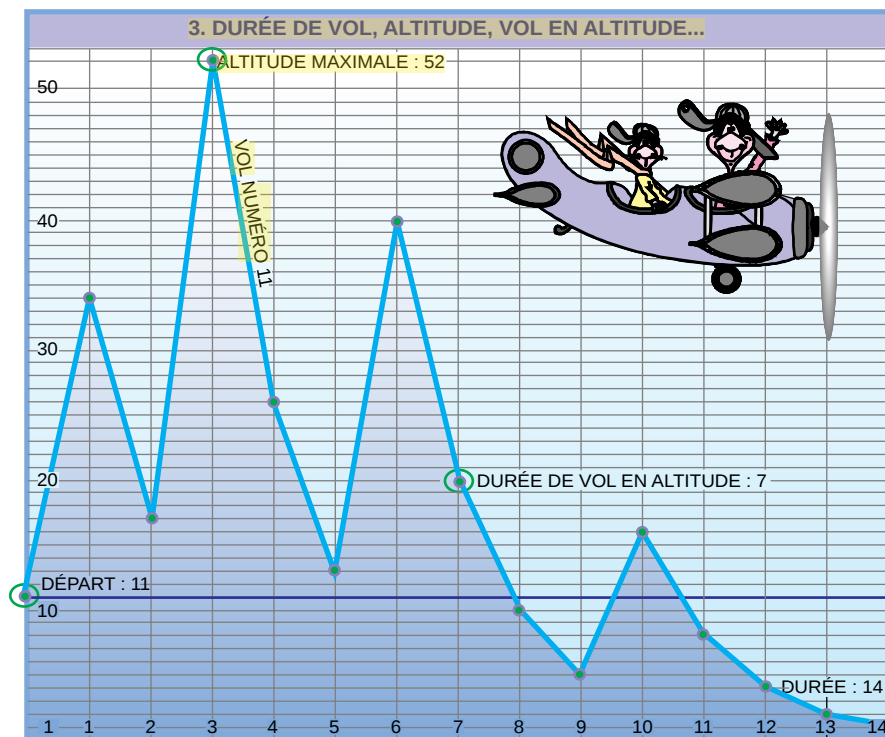
Ces records d'approche sont rares : seuls 15 sont connus aujourd'hui, dont le dernier est $N = 100759293214567$, qui donne $I(N)/P(N) = 0,604938$.

On sait que, pour tout entier p , il existe au moins un vol de durée p : le vol 2^p . En général, il en existe d'autres, et trouver celui qui a le plus petit numéro n'est pas facile. Un défi a été lancé pour l'an 2000 : trouver le plus petit entier n dont la durée de vol est 2000. Actuellement, c'est 377060271667498687, mais rien n'assure qu'il n'y a pas mieux.

En programmation, l'intelligence est utile, et les résultats obtenus avec les plus puissantes machines peuvent être battus par un ordinateur personnel astucieusement programmé. Voici quelques idées conduisant à gagner du temps dans la recherche d'un contre-exemple et utiles pour battre les records mentionnés.

Pour établir que tout vol inférieur à n atterrit en 1, il n'est pas nécessaire de mener le calcul jusqu'à 1 : on peut arrêter chaque vol dès qu'il passe en dessous de son point de départ x (car si, avant x , on a testé tous les vols de numéros inférieurs, on est alors certain que le vol x , une fois arrivé sous x , se poursuivra jusqu'à 1). On arrête aussi le calcul dès qu'on trouve un nombre déjà atteint par un vol précédent (pour le savoir, on doit mémoriser les nombres par lesquels on est déjà passé, ce qui doit se faire intelligemment pour que le procédé soit économique).

Plus intéressantes encore sont les remarques mathématiques du type :



tout vol dont le numéro est de la forme $n = 4k + 1$ finit par passer en dessous de n . On calcule les étapes à partir de n (qui est impair) : on obtient $12k + 4$ (pair), $6k + 2$ (pair), $3k + 1$ (pair ou impair, mais plus petit que n).

Ainsi, dans une suite de tests systématiques, il est inutile de traiter les nombres de la forme $4k + 1$ (car ils passent toujours sous n), ce qui fait gagner 25 pour cent du temps de calcul. Comme il est aussi inutile de traiter ceux de la forme $4k$ ou $4k + 2$ (qui passent dès la première étape au-dessous de leur point de départ), il ne reste plus qu'à essayer ceux de la forme $4k + 3$, soit une économie de calcul de 75 pour cent par rapport à la méthode naïve.

Ce type d'accélération des calculs mérite d'être perfectionné. Voici un premier pas dans cette direction : tout vol dont le numéro est de la forme $n = 16k + 3$ finit par passer en dessous de n . En effet, les étapes à partir de $16k + 3$ (impair) sont $48k + 10$ (pair), $24k + 5$ (impair), $72k + 16$ (pair), $36k + 8$ (pair), $18k + 4$ (pair), $9k + 2$ (pair ou impair, mais plus petit que n).

En poursuivant sur le même principe, on montre que, si l'on écrit les nombres sous la forme $256k + i$ avec i variant de 0 à 255, seuls ceux correspondant à un i parmi : 27, 31, 47, 55, 63, 71, 91, 103, 111, 127, 155, 159, 167, 191, 207, 223, 231, 235, 239, 251, 255 doivent être traités, ce qui cette fois donne un gain de plus de 92 pour cent.

Le programme de E. Roosendaal, à qui l'on doit certains records, est fondé sur une étude des entiers mis sous la

forme $65536k + i$ ($65536 = 2^{16}$), dont seuls 1 729 cas (soit 2,6 pour cent) restent à étudier. Cette économie est associée, dans son programme, à d'autres idées arithmétiques, ainsi qu'à une méthode de traitement simultané de plusieurs vols à la fois. Le programme de T. Oliveira e Silva améliore encore ces idées, ce qui lui permet d'être le détenteur actuel du record de vérification de la conjecture.

DES RÉSULTATS EN PROGRÈS

Les résultats les plus avancés obtenus du côté des tentatives de démonstrations mathématiques utilisent aussi l'idée du *vol en altitude*. En effet, un peu de réflexion montre que la conjecture de Syracuse est équivalente à *la durée de tout vol en altitude est finie* : tout vol finit par passer sous son point de départ.

Fondant leurs raisonnements sur une étude arithmétique fine de l'arbre associé à la conjecture, R. Terra et C. Everett ont montré indépendamment que «presque tout vol finit par passer sous son point de départ». Le «presque» signifie ici que :

- il existe un nombre n tel que, parmi les vols de numéro inférieurs à n , au plus dix pour cent ne passent pas sous leur point de départ ;

- il existe un nombre n' (plus grand que n) tel que, parmi les vols de numéros inférieurs à n' , au plus un pour cent ne passent pas sous leur point de départ ;

- il existe un nombre n'' (plus grand que n') tel que parmi les vols de numéros

inférieurs à n'' , au plus 0,1 pour cent ne passent pas sous leur point de départ ; etc.

On a l'impression qu'on n'est pas loin de la conjecture, mais réfléchissez : ce résultat signifie seulement que les vols qui restent toujours en altitude sont de plus en plus rares quand on tend vers l'infini. Il se peut quand même qu'il en existe, et donc on ne peut pas déduire la conjecture du *presque* de R. Terra et C. Everett.

Pire, leur résultat n'implique même pas qu'une infinité de vols atterrissent en 1, car il n'interdit pas l'existence d'un cycle autre $4 - 2 - 1$. Le résultat est un progrès seulement si c'est véritablement un premier pas vers le même résultat sans le «presque».

Plus récemment, des démonstrations concernant cette fois les vols qui atterrissent en 1 (et non plus les vols qui ne restent qu'un temps fini au-dessus de leur point de départ) ont été obtenues. On a prouvé qu'il existait une constante c telle que, si n est assez grand, alors le nombre de x inférieurs à n qui atterrissent en 1 est supérieur à n^c .

Le résultat a d'abord été montré pour la constante $c = 0,05$ par R. Crandall en 1978, puis avec $c = 0,3$ par J. Sander et $c = 0,43$ par I. Krasikov en 1989, puis avec $c = 0,48$ par G. Wirsching en 1993, et enfin avec $c = 0,81$ par D. Applegate et J. Lagarias en 1995. On approche du but (qui sera atteint si l'on obtient le résultat avec $c = 1$), mais rien n'assure que les méthodes utilisées permettront d'avancer plus.

La démonstration du résultat de 1995 est assez particulière, car elle utilise la résolution de grands systèmes d'équations qui ont été traitées par programmes. La démonstration ne peut être vérifiée à la main, et l'article dans lequel le résultat est présenté donne, non pas la démonstration du théorème avec $c = 0,81$, mais l'explication de la façon dont les systèmes d'équations sont écrits, les résultats des programmes et la manière de les interpréter : un mathématicien qui veut vérifier le résultat doit suivre les explications et les raisonnements, écrire un programme (compliqué!), le faire fonctionner et s'assurer qu'il a obtenu ce qu'il faut.

Une autre série de résultats remarquables concerne cette fois les cycles (éventuels) autres que celui à trois éléments, $4 - 2 - 1$. R. Crandall et N. Yoneda ont établi en 1978 que, s'il en existait, ils étaient nécessairement de taille (nombre de leurs éléments) supérieure à 275 000. Cette borne a été poussée à 17 087 915 en 1993, puis tout récemment à 102 225 496. Les preuves de ces affirmations utilisent les informations provenant des records de vérification de la conjecture, faisant là encore de ces résul-