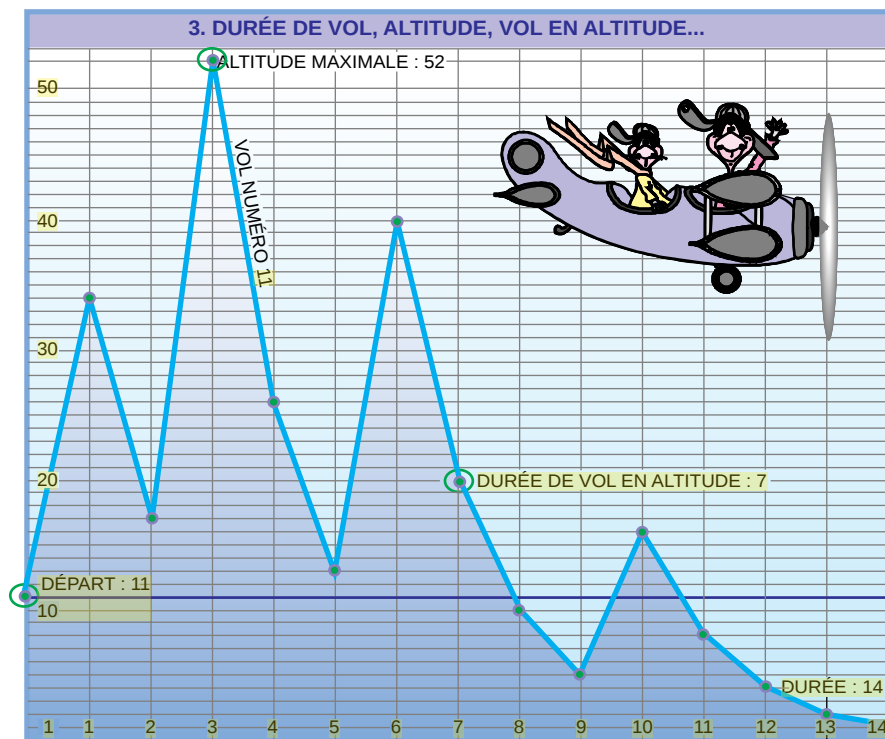




tout vol dont le numéro est de la forme  $n = 4k + 1$  finit par passer en dessous de  $n$ . On calcule les étapes à partir de  $n$  (qui est impair) : on obtient  $12k + 4$  (pair),  $6k + 2$  (pair),  $3k + 1$  (pair ou impair, mais plus petit que  $n$ ).

Ainsi, dans une suite de tests systématiques, il est inutile de traiter les nombres de la forme  $4k + 1$  (car ils passent toujours sous  $n$ ), ce qui fait gagner 25 pour cent du temps de calcul. Comme il est aussi inutile de traiter ceux de la forme  $4k$  ou  $4k + 2$  (qui passent dès la première étape au-dessous de leur point de départ), il ne reste plus qu'à essayer ceux de la forme  $4k + 3$ , soit une économie de calcul de 75 pour cent par rapport à la méthode naïve.

Ce type d'accélération des calculs mérite d'être perfectionné. Voici un premier pas dans cette direction : tout vol dont le numéro est de la forme  $n = 16k + 3$  finit par passer en dessous de  $n$ . En effet, les étapes à partir de  $16k + 3$  (impair) sont  $48k + 10$  (pair),  $24k + 5$  (impair),  $72k + 16$  (pair),  $36k + 8$  (pair),  $18k + 4$  (pair),  $9k + 2$  (pair ou impair, mais plus petit que  $n$ ).

En poursuivant sur le même principe, on montre que, si l'on écrit les nombres sous la forme  $256k + i$  avec  $i$  variant de 0 à 255, seuls ceux correspondant à un  $i$  parmi : 27, 31, 47, 55, 63, 71, 91, 103, 111, 127, 155, 159, 167, 191, 207, 223, 231, 235, 239, 251, 255 doivent être traités, ce qui cette fois donne un gain de plus de 92 pour cent.

Le programme de E. Roosendaal, à qui l'on doit certains records, est fondé sur une étude des entiers mis sous la

forme  $65536k + i$  ( $65536 = 2^{16}$ ), dont seuls 1 729 cas (soit 2,6 pour cent) restent à étudier. Cette économie est associée, dans son programme, à d'autres idées arithmétiques, ainsi qu'à une méthode de traitement simultané de plusieurs vols à la fois. Le programme de T. Oliveira e Silva améliore encore ces idées, ce qui lui permet d'être le détenteur actuel du record de vérification de la conjecture.

### DES RÉSULTATS EN PROGRÈS

Les résultats les plus avancés obtenus du côté des tentatives de démonstrations mathématiques utilisent aussi l'idée du *vol en altitude*. En effet, un peu de réflexion montre que la conjecture de Syracuse est équivalente à *la durée de tout vol en altitude est finie* : tout vol finit par passer sous son point de départ.

Fondant leurs raisonnements sur une étude arithmétique fine de l'arbre associé à la conjecture, R. Terra et C. Everett ont montré indépendamment que «presque tout vol finit par passer sous son point de départ». Le «presque» signifie ici que :

- il existe un nombre  $n$  tel que, parmi les vols de numéro inférieurs à  $n$ , au plus dix pour cent ne passent pas sous leur point de départ ;
- il existe un nombre  $n'$  (plus grand que  $n$ ) tel que, parmi les vols de numéros inférieurs à  $n'$ , au plus un pour cent ne passent pas sous leur point de départ ;
- il existe un nombre  $n''$  (plus grand que  $n'$ ) tel que parmi les vols de numéros

inférieurs à  $n''$ , au plus 0,1 pour cent ne passent pas sous leur point de départ ; etc.

On a l'impression qu'on n'est pas loin de la conjecture, mais réfléchissez : ce résultat signifie seulement que les vols qui restent toujours en altitude sont de plus en plus rares quand on tend vers l'infini. Il se peut quand même qu'il en existe, et donc on ne peut pas déduire la conjecture du *presque* de R. Terra et C. Everett.

Pire, leur résultat n'implique même pas qu'une infinité de vols atterrissent en 1, car il n'interdit pas l'existence d'un cycle autre  $4 - 2 - 1$ . Le résultat est un progrès seulement si c'est véritablement un premier pas vers le même résultat sans le «presque».

Plus récemment, des démonstrations concernant cette fois les vols qui atterrissent en 1 (et non plus les vols qui ne restent qu'un temps fini au-dessus de leur point de départ) ont été obtenues. On a prouvé qu'il existait une constante  $c$  telle que, si  $n$  est assez grand, alors le nombre de  $x$  inférieurs à  $n$  qui atterrissent en 1 est supérieur à  $n^c$ .

Le résultat a d'abord été montré pour la constante  $c = 0,05$  par R. Crandall en 1978, puis avec  $c = 0,3$  par J. Sander et  $c = 0,43$  par I. Krasikov en 1989, puis avec  $c = 0,48$  par G. Wirsching en 1993, et enfin avec  $c = 0,81$  par D. Applegate et J. Lagarias en 1995. On approche du but (qui sera atteint si l'on obtient le résultat avec  $c = 1$ ), mais rien n'assure que les méthodes utilisées permettront d'avancer plus.

La démonstration du résultat de 1995 est assez particulière, car elle utilise la résolution de grands systèmes d'équations qui ont été traitées par programmes. La démonstration ne peut être vérifiée à la main, et l'article dans lequel le résultat est présenté donne, non pas la démonstration du théorème avec  $c = 0,81$ , mais l'explication de la façon dont les systèmes d'équations sont écrits, les résultats des programmes et la manière de les interpréter : un mathématicien qui veut vérifier le résultat doit suivre les explications et les raisonnements, écrire un programme (compliqué!), le faire fonctionner et s'assurer qu'il a obtenu ce qu'il faut.

Une autre série de résultats remarquables concerne cette fois les cycles (éventuels) autres que celui à trois éléments,  $4 - 2 - 1$ . R. Crandall et N. Yoneda ont établi en 1978 que, s'il en existait, ils étaient nécessairement de taille (nombre de leurs éléments) supérieure à 275 000. Cette borne a été poussée à 17 087 915 en 1993, puis tout récemment à 102 225 496. Les preuves de ces affirmations utilisent les informations provenant des records de vérification de la conjecture, faisant là encore de ces résul-