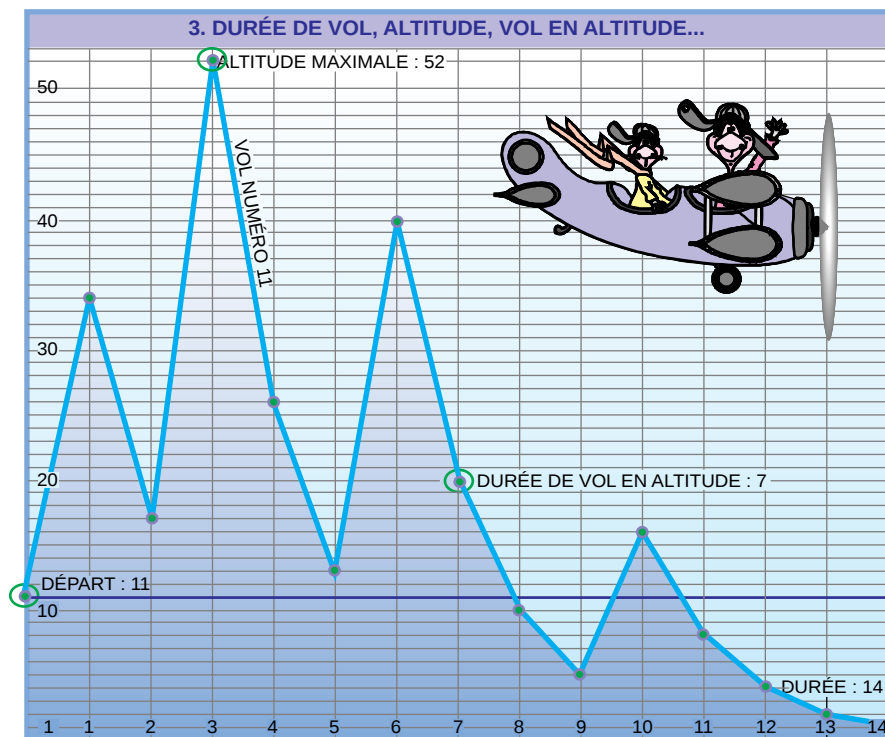




tout vol dont le numéro est de la forme $n = 4k + 1$ finit par passer en dessous de n . On calcule les étapes à partir de n (qui est impair) : on obtient $12k + 4$ (pair), $6k + 2$ (pair), $3k + 1$ (pair ou impair, mais plus petit que n).

Ainsi, dans une suite de tests systématiques, il est inutile de traiter les nombres de la forme $4k + 1$ (car ils passent toujours sous n), ce qui fait gagner 25 pour cent du temps de calcul. Comme il est aussi inutile de traiter ceux de la forme $4k$ ou $4k + 2$ (qui passent dès la première étape au-dessous de leur point de départ), il ne reste plus qu'à essayer ceux de la forme $4k + 3$, soit une économie de calcul de 75 pour cent par rapport à la méthode naïve.

Ce type d'accélération des calculs mérite d'être perfectionné. Voici un premier pas dans cette direction : tout vol dont le numéro est de la forme $n = 16k + 3$ finit par passer en dessous de n . En effet, les étapes à partir de $16k + 3$ (impair) sont $48k + 10$ (pair), $24k + 5$ (impair), $72k + 16$ (pair), $36k + 8$ (pair), $18k + 4$ (pair), $9k + 2$ (pair ou impair, mais plus petit que n).

En poursuivant sur le même principe, on montre que, si l'on écrit les nombres sous la forme $256k + i$ avec i variant de 0 à 255, seuls ceux correspondant à un i parmi : 27, 31, 47, 55, 63, 71, 91, 103, 111, 127, 155, 159, 167, 191, 207, 223, 231, 235, 239, 251, 255 doivent être traités, ce qui cette fois donne un gain de plus de 92 pour cent.

Le programme de E. Roosendaal, à qui l'on doit certains records, est fondé sur une étude des entiers mis sous la

forme $65536k + i$ ($65536 = 2^{16}$), dont seuls 1 729 cas (soit 2,6 pour cent) restent à étudier. Cette économie est associée, dans son programme, à d'autres idées arithmétiques, ainsi qu'à une méthode de traitement simultané de plusieurs vols à la fois. Le programme de T. Oliveira e Silva améliore encore ces idées, ce qui lui permet d'être le détenteur actuel du record de vérification de la conjecture.

DES RÉSULTATS EN PROGRÈS

Les résultats les plus avancés obtenus du côté des tentatives de démonstrations mathématiques utilisent aussi l'idée du *vol en altitude*. En effet, un peu de réflexion montre que la conjecture de Syracuse est équivalente à *la durée de tout vol en altitude est finie* : tout vol finit par passer sous son point de départ.

Fondant leurs raisonnements sur une étude arithmétique fine de l'arbre associé à la conjecture, R. Terra et C. Everett ont montré indépendamment que «presque tout vol finit par passer sous son point de départ». Le «presque» signifie ici que :

- il existe un nombre n tel que, parmi les vols de numéro inférieurs à n , au plus dix pour cent ne passent pas sous leur point de départ ;
- il existe un nombre n' (plus grand que n) tel que, parmi les vols de numéros inférieurs à n' , au plus un pour cent ne passent pas sous leur point de départ ;
- il existe un nombre n'' (plus grand que n') tel que parmi les vols de numéros

inférieurs à n'' , au plus 0,1 pour cent ne passent pas sous leur point de départ ; etc.

On a l'impression qu'on n'est pas loin de la conjecture, mais réfléchissez : ce résultat signifie seulement que les vols qui restent toujours en altitude sont de plus en plus rares quand on tend vers l'infini. Il se peut quand même qu'il en existe, et donc on ne peut pas déduire la conjecture du *presque* de R. Terra et C. Everett.

Pire, leur résultat n'implique même pas qu'une infinité de vols atterrissent en 1, car il n'interdit pas l'existence d'un cycle autre $4 - 2 - 1$. Le résultat est un progrès seulement si c'est véritablement un premier pas vers le même résultat sans le «presque».

Plus récemment, des démonstrations concernant cette fois les vols qui atterrissent en 1 (et non plus les vols qui ne restent qu'un temps fini au-dessus de leur point de départ) ont été obtenues. On a prouvé qu'il existait une constante c telle que, si n est assez grand, alors le nombre de x inférieurs à n qui atterrissent en 1 est supérieur à n^c .

Le résultat a d'abord été montré pour la constante $c = 0,05$ par R. Crandall en 1978, puis avec $c = 0,3$ par J. Sander et $c = 0,43$ par I. Krasikov en 1989, puis avec $c = 0,48$ par G. Wirsching en 1993, et enfin avec $c = 0,81$ par D. Applegate et J. Lagarias en 1995. On approche du but (qui sera atteint si l'on obtient le résultat avec $c = 1$), mais rien n'assure que les méthodes utilisées permettront d'avancer plus.

La démonstration du résultat de 1995 est assez particulière, car elle utilise la résolution de grands systèmes d'équations qui ont été traitées par programmes. La démonstration ne peut être vérifiée à la main, et l'article dans lequel le résultat est présenté donne, non pas la démonstration du théorème avec $c = 0,81$, mais l'explication de la façon dont les systèmes d'équations sont écrits, les résultats des programmes et la manière de les interpréter : un mathématicien qui veut vérifier le résultat doit suivre les explications et les raisonnements, écrire un programme (compliqué!), le faire fonctionner et s'assurer qu'il a obtenu ce qu'il faut.

Une autre série de résultats remarquables concerne cette fois les cycles (éventuels) autres que celui à trois éléments, $4 - 2 - 1$. R. Crandall et N. Yoneda ont établi en 1978 que, s'il en existait, ils étaient nécessairement de taille (nombre de leurs éléments) supérieure à 275 000. Cette borne a été poussée à 17 087 915 en 1993, puis tout récemment à 102 225 496. Les preuves de ces affirmations utilisent les informations provenant des records de vérification de la conjecture, faisant là encore de ces résul-

tats mathématiques des propriétés invérifiables par un mathématicien sans ordinateur. S'il y a des cycles autres que notre cycle $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$, ils seront vraiment très longs !

UN ARGUMENT HEURISTIQUE

Les expérimentations numériques jusqu'à $3,2 \cdot 10^{16}$ constituent un premier «presque» ; les résultats mathématiques déjà cités constituent un second «presque». En voici un troisième.

Certains raisonnements dits *heuristiques* («qui aident à la découverte»), fondés sur des considérations approximatives ou probabilistes, éclairent une question mathématique. Le raisonnement suivant concernant la conjecture de Syracuse est une tentative de ce type :

«Chaque nombre est soit pair, soit impair ; il y a autant de nombres pairs que de nombres impairs, et donc une fois sur deux, lors d'un vol, on appliquera la formule $n \rightarrow 3n + 1$ et, une fois sur deux, on appliquera la formule $n \rightarrow n/2$. À chaque fois qu'on fera deux étapes, l'altitude sera donc, en gros, multipliée par $3/2$ (ce qui revient à ajouter 50 pour cent), et... le vol montera à des altitudes infinies.» Le raisonnement heuristique naïf conduit à l'inverse de ce qu'énonce la conjecture de Syracuse !

Ce raisonnement est vraiment trop naïf, car il ne tient pas compte du fait que, lorsque l'on a appliqué la formule $n \rightarrow 3n + 1$ à partir d'un nombre impair, on est certain de trouver un nombre pair (trois fois un nombre impair est impair, en ajoutant un, on a donc un nombre pair).

Il faut améliorer le raisonnement. Voici la version qu'en propose J. Lagarias : après avoir appliqué la formule $n \rightarrow 3n + 1 = m$ (pair) et juste après la formule $m \rightarrow m/2$, on tombe cette fois sur un nombre qu'on peut considérer comme quelconque. Il a donc 1 chance sur 2 d'être impair, 1 chance sur 4 d'être le double d'un nombre impair, 1 chance sur 8 d'être le quadruple d'un nombre impair, etc. Le vol qui mène d'un nombre impair au suivant aura donc pour effet «en moyenne» :

- de multiplier n par $3/2$, une fois sur 2 (trajet de longueur 2) ;
- de le multiplier par $3/4$, une fois sur 4 (trajet de longueur 3) ;
- de le multiplier par $3/8$, une fois sur 8 (trajet de longueur 4) ;
- etc.

Cela conduit à la conclusion qu'en moyenne, entre deux entiers impairs appartenant à un même vol, on multiplie l'altitude par la constante :

$$c = (3/2)^{1/2} (3/4)^{1/4} (3/8)^{1/8} (3/16)^{1/16} \dots = 3/4.$$

4. RÉSULTATS THÉORIQUES

(a) Si tout nombre supérieur à 4 a une durée de vol en altitude finie, alors la conjecture de Syracuse est vraie. Supposons que l'hypothèse est vraie.

Montrons par récurrence que tout n atterrit en 1. C'est vrai pour 5. Soit un entier $n > 5$. Supposons que tout entier $i < n$ atterrit en 1. Par hypothèse, n a une durée de vol en altitude finie. Donc, partant de n , on descend sous n , et l'on arrive donc à un i dont, par hypothèse, on sait qu'il atterrit en 1, donc n atterrit en 1.

(b) Plus généralement, la conjecture de Syracuse est équivalente à l'un des énoncés suivants :

- (1) la durée de tout vol est finie ;
- (2) la durée de tout vol en altitude est finie ;
- (3) tout vol a un nombre fini d'étapes paires ;
- (4) tout vol a un nombre fini d'étapes paires en altitude ;
- (5) tout vol a un nombre fini d'étapes impaires ;
- (6) tout vol a un nombre fini d'étapes impaires en altitude.

Il est clair que l'affirmation (1) implique les autres affirmations.

Nous avons déjà vu que (2) implique (1). Partant d'un nombre pair, on aboutit nécessairement, au bout d'un nombre fini d'étapes, à un nombre impair et partant d'un nombre impair, on aboutit en une étape à un nombre pair. Cela montre que (3) équivaut à (5) et à (1). De même (4) équivaut à (6) et à (2).

En moyenne, on passe donc d'un nombre impair à un nombre impair plus petit de 25 pour cent, et donc on finit par atterrir sur un cycle (le raisonnement heuristique n'exclut pas qu'il puisse y avoir d'autres cycles que $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$).

L'intérêt de ce raisonnement un peu compliqué est qu'en considérant maintenant un processus aléatoire construit sur le modèle supposé dans le raisonnement heuristique, on peut calculer le temps moyen pour que, partant de n , on passe en dessous de n (*durée moyenne de vol en altitude en ne comptant que les étapes impaires*). Le résultat de ce calcul est 3,49265... Or en évaluant, cette fois expérimentalement, la valeur moyenne de cette durée de vol en altitude (on essaie tous les entiers entre trois et deux milliards, et l'on fait la moyenne), on trouve 3,4926... Cette coïncidence numérique remarquable indique que le modèle probabiliste du raisonnement heuristique est certainement correct.

S'il est correct, il n'y a pas de vol infini en altitude, et donc la conjecture est vraie (du moins concernant l'inexistence de vol tendant vers l'infini).

Malheureusement, pour avoir une démonstration complète, il faudrait justifier par une preuve (et pas par une expérimentation) que le modèle probabiliste utilisé est correct. Le raisonnement heuristique renforce la conviction qu'il n'existe pas de vols infinis, mais ce n'est pas une démonstration.

On est ici dans une situation analogue à celle concernant les décimales du nombre π : dans les deux cas, on a une suite numérique parfaitement déterminée par des règles arithmétiques fixées ; dans

les deux cas, on constate que la suite se conforme miraculeusement bien à un modèle probabiliste clairement identifié (pour π , c'est le modèle du tirage équitable des chiffres) ; dans les deux cas, une vérification numérique poussée a été menée, mais, dans les deux cas, sans prouver ce qui est constaté par les calculs numériques.

Remarquons que les modèles probabilistes prédisent que l'altitude la plus haute du vol n est au plus Kn^2 (pour une certaine constante K), ce qui, pour $K = 8$, est aussi expérimentalement vérifié.

Nous avons maintenant trois «presque» pour la conjecture de Syracuse. Des «presque» ne suffisent pas à démontrer un résultat, et donc, même si notre conviction s'est renforcée, la conjecture de Syracuse n'est pas devenue un théorème.

L'INDÉCIDABILITÉ N'EST PAS LOIN

Jeffrey Lagarias m'a indiqué que «la conjecture est encore désespérément hors de portée, mais je la crois vraie. Si elle devait être fausse, cela serait à cause d'un long cycle plutôt qu'à cause d'un vol infini. Même cela semble extrêmement improbable. Mon intuition dit "impossible", mais je ne sais pas en trouver une bonne traduction verbale».

Ne pas réussir à démontrer un résultat conduit à se poser la question : serait-ce un indécidable ? C'est-à-dire : ne se pourrait-il pas que les méthodes traditionnelles des mathématiques (codifiées, par exemple, dans la très puissante théorie des ensembles) ne soient pas en mesure de démontrer la