

tats mathématiques des propriétés invérifiables par un mathématicien sans ordinateur. S'il y a des cycles autres que notre cycle $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$, ils seront vraiment très longs !

UN ARGUMENT HEURISTIQUE

Les expérimentations numériques jusqu'à $3,2 \cdot 10^{16}$ constituent un premier «presque» ; les résultats mathématiques déjà cités constituent un second «presque». En voici un troisième.

Certains raisonnements dits *heuristiques* («qui aident à la découverte»), fondés sur des considérations approximatives ou probabilistes, éclairent une question mathématique. Le raisonnement suivant concernant la conjecture de Syracuse est une tentative de ce type :

«Chaque nombre est soit pair, soit impair ; il y a autant de nombres pairs que de nombres impairs, et donc une fois sur deux, lors d'un vol, on appliquera la formule $n \rightarrow 3n + 1$ et, une fois sur deux, on appliquera la formule $n \rightarrow n/2$. À chaque fois qu'on fera deux étapes, l'altitude sera donc, en gros, multipliée par $3/2$ (ce qui revient à ajouter 50 pour cent), et... le vol montera à des altitudes infinies.» Le raisonnement heuristique naïf conduit à l'inverse de ce qu'énonce la conjecture de Syracuse !

Ce raisonnement est vraiment trop naïf, car il ne tient pas compte du fait que, lorsque l'on a appliqué la formule $n \rightarrow 3n + 1$ à partir d'un nombre impair, on est certain de trouver un nombre pair (trois fois un nombre impair est impair, en ajoutant un, on a donc un nombre pair).

Il faut améliorer le raisonnement. Voici la version qu'en propose J. Lagarias : après avoir appliqué la formule $n \rightarrow 3n + 1 = m$ (pair) et juste après la formule $m \rightarrow m/2$, on tombe cette fois sur un nombre qu'on peut considérer comme quelconque. Il a donc 1 chance sur 2 d'être impair, 1 chance sur 4 d'être le double d'un nombre impair, 1 chance sur 8 d'être le quadruple d'un nombre impair, etc. Le vol qui mène d'un nombre impair au suivant aura donc pour effet «en moyenne» :

- de multiplier n par $3/2$, une fois sur 2 (trajet de longueur 2) ;
- de le multiplier par $3/4$, une fois sur 4 (trajet de longueur 3) ;
- de le multiplier par $3/8$, une fois sur 8 (trajet de longueur 4) ;
- etc.

Cela conduit à la conclusion qu'en moyenne, entre deux entiers impairs appartenant à un même vol, on multiplie l'altitude par la constante : $c = (3/2)^{1/2} (3/4)^{1/4} (3/8)^{1/8} (3/16)^{1/16} \dots = 3/4$.

4. RÉSULTATS THÉORIQUES

(a) Si tout nombre supérieur à 4 a une durée de vol en altitude finie, alors la conjecture de Syracuse est vraie. Supposons que l'hypothèse est vraie.

Montrons par récurrence que tout n atterrit en 1. C'est vrai pour 5. Soit un entier $n > 5$. Supposons que tout entier $i < n$ atterrit en 1. Par hypothèse, n a une durée de vol en altitude finie. Donc, partant de n , on descend sous n , et l'on arrive donc à un i dont, par hypothèse, on sait qu'il atterrit en 1, donc n atterrit en 1.

(b) Plus généralement, la conjecture de Syracuse est équivalente à l'un des énoncés suivants :

- (1) la durée de tout vol est finie ;
- (2) la durée de tout vol en altitude est finie ;
- (3) tout vol a un nombre fini d'étapes paires ;
- (4) tout vol a un nombre fini d'étapes paires en altitude ;
- (5) tout vol a un nombre fini d'étapes impaires ;
- (6) tout vol a un nombre fini d'étapes impaires en altitude.

Il est clair que l'affirmation (1) implique les autres affirmations.

Nous avons déjà vu que (2) implique (1). Partant d'un nombre pair, on aboutit nécessairement, au bout d'un nombre fini d'étapes, à un nombre impair et partant d'un nombre impair, on aboutit en une étape à un nombre pair. Cela montre que (3) équivaut à (5) et à (1). De même (4) équivaut à (6) et à (2).

En moyenne, on passe donc d'un nombre impair à un nombre impair plus petit de 25 pour cent, et donc on finit par atterrir sur un cycle (le raisonnement heuristique n'exclut pas qu'il puisse y avoir d'autres cycles que $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$).

L'intérêt de ce raisonnement un peu compliqué est qu'en considérant maintenant un processus aléatoire construit sur le modèle supposé dans le raisonnement heuristique, on peut calculer le temps moyen pour que, partant de n , on passe en dessous de n (*durée moyenne de vol en altitude en ne comptant que les étapes impaires*). Le résultat de ce calcul est 3,49265... Or en évaluant, cette fois expérimentalement, la valeur moyenne de cette durée de vol en altitude (on essaie tous les entiers entre trois et deux milliards, et l'on fait la moyenne), on trouve 3,4926... Cette coïncidence numérique remarquable indique que le modèle probabiliste du raisonnement heuristique est certainement correct.

S'il est correct, il n'y a pas de vol infini en altitude, et donc la conjecture est vraie (du moins concernant l'existence de vol tendant vers l'infini).

Malheureusement, pour avoir une démonstration complète, il faudrait justifier par une preuve (et pas par une expérimentation) que le modèle probabiliste utilisé est correct. Le raisonnement heuristique renforce la conviction qu'il n'existe pas de vols infinis, mais ce n'est pas une démonstration.

On est ici dans une situation analogue à celle concernant les décimales du nombre π : dans les deux cas, on a une suite numérique parfaitement déterminée par des règles arithmétiques fixées ; dans

les deux cas, on constate que la suite se conforme miraculeusement bien à un modèle probabiliste clairement identifié (pour π , c'est le modèle du tirage équitable des chiffres) ; dans les deux cas, une vérification numérique poussée a été menée, mais, dans les deux cas, sans prouver ce qui est constaté par les calculs numériques.

Remarquons que les modèles probabilistes prédisent que l'altitude la plus haute du vol n est au plus Kn^2 (pour une certaine constante K), ce qui, pour $K = 8$, est aussi expérimentalement vérifié.

Nous avons maintenant trois «presque» pour la conjecture de Syracuse. Des «presque» ne suffisent pas à démontrer un résultat, et donc, même si notre conviction s'est renforcée, la conjecture de Syracuse n'est pas devenue un théorème.

L'INDÉCIDABILITÉ N'EST PAS LOIN

Jeffrey Lagarias m'a indiqué que «la conjecture est encore désespérément hors de portée, mais je la crois vraie. Si elle devait être fausse, cela serait à cause d'un long cycle plutôt qu'à cause d'un vol infini. Même cela semble extrêmement improbable. Mon intuition dit "impossible", mais je ne sais pas en trouver une bonne traduction verbale».

Ne pas réussir à démontrer un résultat conduit à se poser la question : serait-ce un indécidable ? C'est-à-dire : ne se pourrait-il pas que les méthodes traditionnelles des mathématiques (codifiées, par exemple, dans la très puissante théorie des ensembles) ne soient pas en mesure de démontrer la