

tats mathématiques des propriétés invérifiables par un mathématicien sans ordinateur. S'il y a des cycles autres que notre cycle $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$, ils seront vraiment très longs !

UN ARGUMENT HEURISTIQUE

Les expérimentations numériques jusqu'à $3,2 \cdot 10^{16}$ constituent un premier «presque» ; les résultats mathématiques déjà cités constituent un second «presque». En voici un troisième.

Certains raisonnements dits *heuristiques* («qui aident à la découverte»), fondés sur des considérations approximatives ou probabilistes, éclairent une question mathématique. Le raisonnement suivant concernant la conjecture de Syracuse est une tentative de ce type :

«Chaque nombre est soit pair, soit impair ; il y a autant de nombres pairs que de nombres impairs, et donc une fois sur deux, lors d'un vol, on appliquera la formule $n \rightarrow 3n + 1$ et, une fois sur deux, on appliquera la formule $n \rightarrow n/2$. À chaque fois qu'on fera deux étapes, l'altitude sera donc, en gros, multipliée par $3/2$ (ce qui revient à ajouter 50 pour cent), et... le vol montera à des altitudes infinies.» Le raisonnement heuristique naïf conduit à l'inverse de ce qu'énonce la conjecture de Syracuse !

Ce raisonnement est vraiment trop naïf, car il ne tient pas compte du fait que, lorsque l'on a appliqué la formule $n \rightarrow 3n + 1$ à partir d'un nombre impair, on est certain de trouver un nombre pair (trois fois un nombre impair est impair, en ajoutant un, on a donc un nombre pair).

Il faut améliorer le raisonnement. Voici la version qu'en propose J. Lagarias : après avoir appliqué la formule $n \rightarrow 3n + 1 = m$ (pair) et juste après la formule $m \rightarrow m/2$, on tombe cette fois sur un nombre qu'on peut considérer comme quelconque. Il a donc 1 chance sur 2 d'être impair, 1 chance sur 4 d'être le double d'un nombre impair, 1 chance sur 8 d'être le quadruple d'un nombre impair, etc. Le vol qui mène d'un nombre impair au suivant aura donc pour effet «en moyenne» :

- de multiplier n par $3/2$, une fois sur 2 (trajet de longueur 2) ;
- de le multiplier par $3/4$, une fois sur 4 (trajet de longueur 3) ;
- de le multiplier par $3/8$, une fois sur 8 (trajet de longueur 4) ;
- etc.

Cela conduit à la conclusion qu'en moyenne, entre deux entiers impairs appartenant à un même vol, on multiplie l'altitude par la constante :

$$c = (3/2)^{1/2} (3/4)^{1/4} (3/8)^{1/8} (3/16)^{1/16} \dots = 3/4.$$

4. RÉSULTATS THÉORIQUES

(a) Si tout nombre supérieur à 4 a une durée de vol en altitude finie, alors la conjecture de Syracuse est vraie. Supposons que l'hypothèse est vraie.

Montrons par récurrence que tout n atterrit en 1. C'est vrai pour 5. Soit un entier $n > 5$. Supposons que tout entier $i < n$ atterrit en 1. Par hypothèse, n a une durée de vol en altitude finie. Donc, partant de n , on descend sous n , et l'on arrive donc à un i dont, par hypothèse, on sait qu'il atterrit en 1, donc n atterrit en 1.

(b) Plus généralement, la conjecture de Syracuse est équivalente à l'un des énoncés suivants :

- (1) la durée de tout vol est finie ;
- (2) la durée de tout vol en altitude est finie ;
- (3) tout vol a un nombre fini d'étapes paires ;
- (4) tout vol a un nombre fini d'étapes paires en altitude ;
- (5) tout vol a un nombre fini d'étapes impaires ;
- (6) tout vol a un nombre fini d'étapes impaires en altitude.

Il est clair que l'affirmation (1) implique les autres affirmations.

Nous avons déjà vu que (2) implique (1). Partant d'un nombre pair, on aboutit nécessairement, au bout d'un nombre fini d'étapes, à un nombre impair et partant d'un nombre impair, on aboutit en une étape à un nombre pair. Cela montre que (3) équivaut à (5) et à (1). De même (4) équivaut à (6) et à (2).

En moyenne, on passe donc d'un nombre impair à un nombre impair plus petit de 25 pour cent, et donc on finit par atterrir sur un cycle (le raisonnement heuristique n'exclut pas qu'il puisse y avoir d'autres cycles que $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$).

L'intérêt de ce raisonnement un peu compliqué est qu'en considérant maintenant un processus aléatoire construit sur le modèle supposé dans le raisonnement heuristique, on peut calculer le temps moyen pour que, partant de n , on passe en dessous de n (*durée moyenne de vol en altitude en ne comptant que les étapes impaires*). Le résultat de ce calcul est 3,49265... Or en évaluant, cette fois expérimentalement, la valeur moyenne de cette durée de vol en altitude (on essaie tous les entiers entre trois et deux milliards, et l'on fait la moyenne), on trouve 3,4926... Cette coïncidence numérique remarquable indique que le modèle probabiliste du raisonnement heuristique est certainement correct.

S'il est correct, il n'y a pas de vol infini en altitude, et donc la conjecture est vraie (du moins concernant l'inexistence de vol tendant vers l'infini).

Malheureusement, pour avoir une démonstration complète, il faudrait justifier par une preuve (et pas par une expérimentation) que le modèle probabiliste utilisé est correct. Le raisonnement heuristique renforce la conviction qu'il n'existe pas de vols infinis, mais ce n'est pas une démonstration.

On est ici dans une situation analogue à celle concernant les décimales du nombre π : dans les deux cas, on a une suite numérique parfaitement déterminée par des règles arithmétiques fixées ; dans

les deux cas, on constate que la suite se conforme miraculeusement bien à un modèle probabiliste clairement identifié (pour π , c'est le modèle du tirage équitable des chiffres) ; dans les deux cas, une vérification numérique poussée a été menée, mais, dans les deux cas, sans prouver ce qui est constaté par les calculs numériques.

Remarquons que les modèles probabilistes prédisent que l'altitude la plus haute du vol n est au plus Kn^2 (pour une certaine constante K), ce qui, pour $K = 8$, est aussi expérimentalement vérifié.

Nous avons maintenant trois «presque» pour la conjecture de Syracuse. Des «presque» ne suffisent pas à démontrer un résultat, et donc, même si notre conviction s'est renforcée, la conjecture de Syracuse n'est pas devenue un théorème.

L'INDÉCIDABILITÉ N'EST PAS LOIN

Jeffrey Lagarias m'a indiqué que «la conjecture est encore désespérément hors de portée, mais je la crois vraie. Si elle devait être fausse, cela serait à cause d'un long cycle plutôt qu'à cause d'un vol infini. Même cela semble extrêmement improbable. Mon intuition dit "impossible", mais je ne sais pas en trouver une bonne traduction verbale».

Ne pas réussir à démontrer un résultat conduit à se poser la question : serait-ce un indécidable ? C'est-à-dire : ne se pourrait-il pas que les méthodes traditionnelles des mathématiques (codifiées, par exemple, dans la très puissante théorie des ensembles) ne soient pas en mesure de démontrer la

5. LES VOLS RECORDS

VOL	DURÉE	ALTITUDE MAXIMALE
3	7	16
6	8	16
7	16	52
9	19	52
18	20	52
25	23	88
27	111	9232
54	112	9232
73	115	9232
97	118	9232
129	121	9232
171	124	9232
231	127	9232
313	130	9232
327	143	9232
649	144	9232
703	170	250504
871	178	190996
1161	181	190996
2223	182	250504
2463	208	250504
2919	216	250504
3711	237	481624
6171	261	975400
10971	267	975400
13255	275	497176
17647	278	11003416

conjecture de Syracuse qui pourtant serait vraie ?

Notons que la conjecture pourrait être fausse et que cela soit indécidable par les méthodes mathématiques traditionnelles : cela signifierait qu'un jour nous allons tomber sur un entier que nous n'arriverons pas à faire atterrir sur 1, mais dont nous ne saurons pas montrer non plus qu'il n'atterrira jamais sur 1.

Exceptionnellement, nous avons quelques raisons de considérer cette question de l'indécidabilité avec sérieux, car un résultat de logique mathématique établit que nous ne sommes pas loin de l'indécidabilité.

Ce résultat est dû à J. Conway. Celui-ci a considéré les généralisations de la conjecture de Syracuse obtenues en prenant non plus deux formules qu'on applique selon que n est pair ou impair, mais en considérant p formules qu'on applique selon le reste de la division de n par p . Conway montre comment définir précisément une conjecture, du type «tout n atterrit à 1», de telle façon qu'elle soit indécidable dans la théorie des ensembles.

En fait, dans n'importe quelle théorie mathématique, la méthode de Conway permet de construire un problème ressemblant à la conjecture de Syracuse et qui y soit indécidable (attention : cela ne

signifie pas qu'on puisse définir un problème de type Syracuse qui soit indécidable dans toutes les théories à la fois ; une telle chose n'existe pas, car «être indécidable» est toujours relatif à une théorie fixée).

Le résultat de Conway n'établit pas que la conjecture est indécidable ni même qu'elle est difficile (car certaines variantes de la conjecture sont faciles !), mais seulement que des problèmes assez semblables le sont, ce qui est quand même troublant.

En 1993, le résultat de Conway a été utilisé par Philippe Devienne, Patrick Lebègue et Jean-Christophe Routier, du Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille, pour démontrer la puissance d'un formalisme de programmation à base de règles logiques. Comme d'habitude, les recherches en apparence les plus futiles se trouvent avoir des conséquences pratiques, insoupçonnables *a priori*.

LES VARIANTES SONT AUSSI DIFFICILES

Les mathématiciens sont toujours soucieux de généralité, car elle permet d'extraire pleinement la puissance d'un raisonnement particulier et d'en tirer des conséquences inattendues. Ils se sont donc interrogés sur ce qu'on obtenait pour des problèmes ressemblant à la conjecture de Syracuse.

Ils se sont demandé d'abord ce qui se passait pour le problème $3x + 1$ lorsqu'on autorisait les altitudes négatives. La conjecture qu'ils ont proposée est que tous les vols se terminent sur l'un des trois cycles suivants :

$-1 \rightarrow -2$.

$-5 \rightarrow -14 \rightarrow -7 \rightarrow -20 \rightarrow -10$.

$-17 \rightarrow -50 \rightarrow -25 \rightarrow -74 \rightarrow -37 \rightarrow -110 \rightarrow -55 \rightarrow -164 \rightarrow -82 \rightarrow -41 \rightarrow -122 \rightarrow -61 \rightarrow -182 \rightarrow -91 \rightarrow -272 \rightarrow -136 \rightarrow -68 \rightarrow -34$.

Pour la fonction $5x + 1$ (à utiliser à place de $3x + 1$ quand x est impair), tous les vols n'arrivent pas à 1, car, en plus du cycle $6 \rightarrow 3 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$, on trouve les cycles :

$13 \rightarrow 66 \rightarrow 33 \rightarrow 166 \rightarrow 83 \rightarrow 416 \rightarrow 208 \rightarrow 104 \rightarrow 52 \rightarrow 26$.

$17 \rightarrow 86 \rightarrow 43 \rightarrow 216 \rightarrow 108 \rightarrow 54 \rightarrow 27 \rightarrow 136 \rightarrow 68 \rightarrow 34$.

Le vol 7 pour $5x + 1$ semble infini quoi qu'on ne sache pas le démontrer.

L'adaptation de l'argument heuristique de Lagarias suggère d'ailleurs que, pour $qx + 1$ à la place de $3x + 1$, si q est > 3 , alors il existe des vols infinis.

Pour le problème $181x + 1$, on trouve un cycle qui ne contient pas 1. De même, pour $q = 1\,093$, on démontre que certains vols n'atterrissent pas à 1.

Tout cela a conduit à une nouvelle conjecture formulée par Richard Crandal (une sorte de conjecture anti-Syracuse) qui affirme : pour $q \times 1$ (à la place de $3x + 1$), avec q impair et supérieur à 3, il y a toujours au moins un vol qui n'atterrit pas en 1. Bien sûr, cette conjecture reste à démontrer !

Les considérations ci-dessus sur les cycles montrent que la conjecture de Crandal est vraie pour q égal à 5, 181 et 1093. En 1995, Z. Franco et C. Pomerance ont montré que les entiers q pour lesquels la conjecture de Crandal était vraie devenaient de plus en plus fréquents quand q tend vers l'infini, autrement dit que la conjecture était «presque vraie» (comme il est «presque vrai» que tout vol pour $3x + 1$ passe sous son point de départ).

D'autres généralisations ont été formulées, et des résultats ont établi des connexions entre ces questions, l'arithmétique des nombres premiers, certaines équations diophantiennes (équations à coefficients entiers dont on cherche des solutions en nombres entiers), les chaînes de Markov (des itérations probabilistes) et la théorie ergodique (études de l'utilisation répétée des fonctions de mélange).

Avec toutes ces variantes donc, même si la conjecture de Syracuse était résolue prochainement, les mathématiciens et les expérimentateurs numériques ont de quoi s'amuser pendant des siècles.

Jean-Paul DELAHAYE est directeur adjoint du Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille du CNRS.

e-mail : delahaye@lil.fr

J. H. CONWAY, *Unpredictable Iterations. Proc. 1972 Number Theory Conference, University of Colorado, Boulder, 1972.*

V. KLEE et S. WAGON, *Old and New Unsolved Problems in Plane Geometry and Number Theory. Ch. 19 : The $3x + 1$ Problem*, Math. Assoc. of America, Dolciani Math. Exposition, 11, 1993.

J. LAGARIAS, *The $3x + 1$ Problem and its Generalizations*, in *Amer. Math. Monthly*, 92, pp. 3-23, 1985.

J. LAGARIAS, *The $3x + 1$ Problem Annotated Bibliography*. Novembre 1997. Communication personnelle.

K.R. MATTHEWS, *The Generalized $3x + 1$ Mapping*, 1997, à paraître.

T. Oliveira e SILVA, *Maximum Excursion and Stopping Time Record Holders for the $3x+1$ Problem : Computational Results*. À paraître dans *Mathematics of Computation*.

E. ROOSENDAL, *On the $3x + 1$ Problem (1-1998)* : <http://personal.computrain.nl/eric/wondrous/>