

5. LES VOLS RECORDS

VOL	DURÉE	ALTITUDE MAXIMALE
3	7	16
6	8	16
7	16	52
9	19	52
18	20	52
25	23	88
27	111	9232
54	112	9232
73	115	9232
97	118	9232
129	121	9232
171	124	9232
231	127	9232
313	130	9232
327	143	9232
649	144	9232
703	170	250504
871	178	190996
1161	181	190996
2223	182	250504
2463	208	250504
2919	216	250504
3711	237	481624
6171	261	975400
10971	267	975400
13255	275	497176
17647	278	11003416

conjecture de Syracuse qui pourtant serait vraie ?

Notons que la conjecture pourrait être fausse et que cela soit indécidable par les méthodes mathématiques traditionnelles : cela signifierait qu'un jour nous allons tomber sur un entier que nous n'arriverons pas à faire atterrir sur 1, mais dont nous ne saurons pas montrer non plus qu'il n'atterrira jamais sur 1.

Exceptionnellement, nous avons quelques raisons de considérer cette question de l'indécidabilité avec sérieux, car un résultat de logique mathématique établit que nous ne sommes pas loin de l'indécidabilité.

Ce résultat est dû à J. Conway. Celui-ci a considéré les généralisations de la conjecture de Syracuse obtenues en prenant non plus deux formules qu'on applique selon que n est pair ou impair, mais en considérant p formules qu'on applique selon le reste de la division de n par p . Conway montre comment définir précisément une conjecture, du type « tout n atterrit à 1 », de telle façon qu'elle soit indécidable dans la théorie des ensembles.

En fait, dans n'importe quelle théorie mathématique, la méthode de Conway permet de construire un problème ressemblant à la conjecture de Syracuse et qui y soit indécidable (attention : cela ne

signifie pas qu'on puisse définir un problème de type Syracuse qui soit indécidable dans toutes les théories à la fois ; une telle chose n'existe pas, car « être indécidable » est toujours relatif à une théorie fixée).

Le résultat de Conway n'établit pas que la conjecture est indécidable ni même qu'elle est difficile (car certaines variantes de la conjecture sont faciles !), mais seulement que des problèmes assez semblables le sont, ce qui est quand même troublant.

En 1993, le résultat de Conway a été utilisé par Philippe Devienne, Patrick Lebègue et Jean-Christophe Routier, du Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille, pour démontrer la puissance d'un formalisme de programmation à base de règles logiques. Comme d'habitude, les recherches en apparence les plus futiles se trouvent avoir des conséquences pratiques, insoupçonnables *a priori*.

LES VARIANTES SONT AUSSI DIFFICILES

Les mathématiciens sont toujours soucieux de généralité, car elle permet d'extraire pleinement la puissance d'un raisonnement particulier et d'en tirer des conséquences inattendues. Ils se sont donc interrogés sur ce qu'on obtenait pour des problèmes ressemblant à la conjecture de Syracuse.

Ils se sont demandé d'abord ce qui se passait pour le problème $3x + 1$ lorsqu'on autorisait les altitudes négatives. La conjecture qu'ils ont proposée est que tous les vols se terminent sur l'un des trois cycles suivants :

$-1 \rightarrow -2$.
 $-5 \rightarrow -14 \rightarrow -7 \rightarrow -20 \rightarrow -10$.
 $-17 \rightarrow -50 \rightarrow -25 \rightarrow -74 \rightarrow -37 \rightarrow -110$
 $\rightarrow -55 \rightarrow -164 \rightarrow -82 \rightarrow -41 \rightarrow -122 \rightarrow$
 $-61 \rightarrow -182 \rightarrow -91 \rightarrow -272 \rightarrow -136 \rightarrow$
 $-68 \rightarrow -34$.

Pour la fonction $5x + 1$ (à utiliser à la place de $3x + 1$ quand x est impair), tous les vols n'arrivent pas à 1, car, en plus du cycle $6 \rightarrow 3 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$, on trouve les cycles :

$13 \rightarrow 66 \rightarrow 33 \rightarrow 166 \rightarrow 83 \rightarrow 416 \rightarrow$
 $208 \rightarrow 104 \rightarrow 52 \rightarrow 26$.
 $17 \rightarrow 86 \rightarrow 43 \rightarrow 216 \rightarrow 108 \rightarrow 54 \rightarrow 27$
 $\rightarrow 136 \rightarrow 68 \rightarrow 34$.

Le vol 7 pour $5x + 1$ semble infini quoi qu'on ne sache pas le démontrer.

L'adaptation de l'argument heuristique de Lagarias suggère d'ailleurs que, pour $qx + 1$ à la place de $3x + 1$, si q est > 3 , alors il existe des vols infinis.

Pour le problème $181x + 1$, on trouve un cycle qui ne contient pas 1. De même, pour $q = 1\,093$, on démontre que certains vols n'atterrissent pas à 1.

Tout cela a conduit à une nouvelle conjecture formulée par Richard Crandal (une sorte de conjecture anti-Syracuse) qui affirme : pour $q \times x + 1$ (à la place de $3x + 1$), avec q impair et supérieur à 3, il y a toujours au moins un vol qui n'atterrit pas en 1. Bien sûr, cette conjecture reste à démontrer !

Les considérations ci-dessus sur les cycles montrent que la conjecture de Crandal est vraie pour q égal à 5, 181 et 1093. En 1995, Z. Franco et C. Pomerance ont montré que les entiers q pour lesquels la conjecture de Crandal était vraie devenaient de plus en plus fréquents quand q tend vers l'infini, autrement dit que la conjecture était « presque vraie » (comme il est « presque vrai » que tout vol pour $3x + 1$ passe sous son point de départ).

D'autres généralisations ont été formulées, et des résultats ont établi des connexions entre ces questions, l'arithmétique des nombres premiers, certaines équations diophantiennes (équations à coefficients entiers dont on cherche des solutions en nombres entiers), les chaînes de Markov (des itérations probabilistes) et la théorie ergodique (études de l'utilisation répétée des fonctions de mélange).

Avec toutes ces variantes donc, même si la conjecture de Syracuse était résolue prochainement, les mathématiciens et les expérimentateurs numériques ont de quoi s'amuser pendant des siècles.

Jean-Paul DELAHAYE est directeur adjoint du Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille du CNRS.

e-mail : delahaye@lilfl.fr

J. H. CONWAY, *Unpredictable Iterations. Proc. 1972 Number Theory Conference, University of Colorado, Boulder, 1972.*

V. KLEE et S. WAGON, *Old and New Unsolved Problems in Plane Geometry and Number Theory. Ch. 19 : The $3x + 1$ Problem*, Math. Assoc. of America, Dolciani Math. Exposition, 11, 1993.

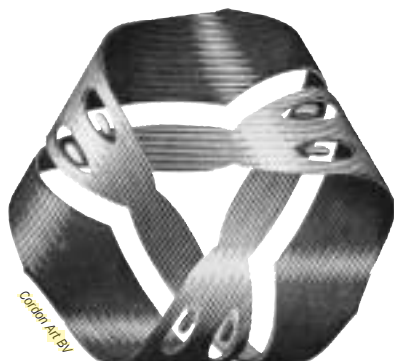
J. LAGARIAS, *The $3x + 1$ Problem and its Generalizations*, in *Amer. Math. Monthly*, 92, pp. 3-23, 1985.

J. LAGARIAS, *The $3x + 1$ Problem Annotated Bibliography*. Novembre 1997. Communication personnelle.

K.R. MATTHEWS, *The Generalized $3x + 1$ Mapping*, 1997, à paraître.

T. Oliveira e SILVA, *Maximum Excursion and Stopping Time Record Holders for the $3x+1$ Problem : Computational Results*. À paraître dans *Mathematics of Computation*.

E. ROOSENDAL, *On the $3x + 1$ Problem (1-1998)* : <http://personal.compu-train.nl/eric/wondrous/>



Bouteilles et rubans

IAN STEWART

Soufflage de verre et topologie.

Alan Bennett est un souffleur de verre qui exerce son art à Bedford, en Angleterre. Il y quelques années, il fut intrigué par les étranges surfaces qu'étudient les topologistes : ruban de Möbius, bouteilles de Klein, etc. Cherchant à les reproduire, il rencontra un curieux problème mathématique qu'il résolut par le soufflage, alors que des mathématiciens avaient jusque là échoué. Sa série d'objets remarquables, de la recherche mathématique figée dans le verre, sera bientôt exposée dans les musées scientifiques.

Les topologistes étudient les propriétés qui sont inchangées quand une forme est étirée, tordue ou arbitrairement déformée. On impose seulement aux déformations d'être « continues » : les objets peuvent être coupés s'ils sont recollés, de sorte que des points initialement voisins le soient encore après le recollement. La connexion est une propriété topologique : les objets sont-ils d'une ou de plusieurs pièces ? Il y a d'autres interrogations topologiques. Les objets sont-ils noués ? Sont-ils liés les uns aux autres ? Sont-ils troués ?

Les formes topologiques les plus usuelles semblent n'être que des amusements enfantins, mais ils sont pleins de mystères mathématiques profonds. Ainsi, le ruban de Möbius, que l'on obtient en recollant les extrémités d'une bande de papier, après l'avoir tordue d'un demi tour, est la plus simple des surfaces à une seule face : si deux peintres munis respectivement de peinture bleue et de peinture rouge peignaient ce qu'ils pensaient être les deux faces d'un ruban, ils finiraient par se rencontrer.

Quand on tord une bande de plusieurs demi tours avant de la recoller, on obtient des variantes du ruban de Möbius. Pour un topologiste, la distinction importante réside entre les bandes recollées après un nombre pair de demi

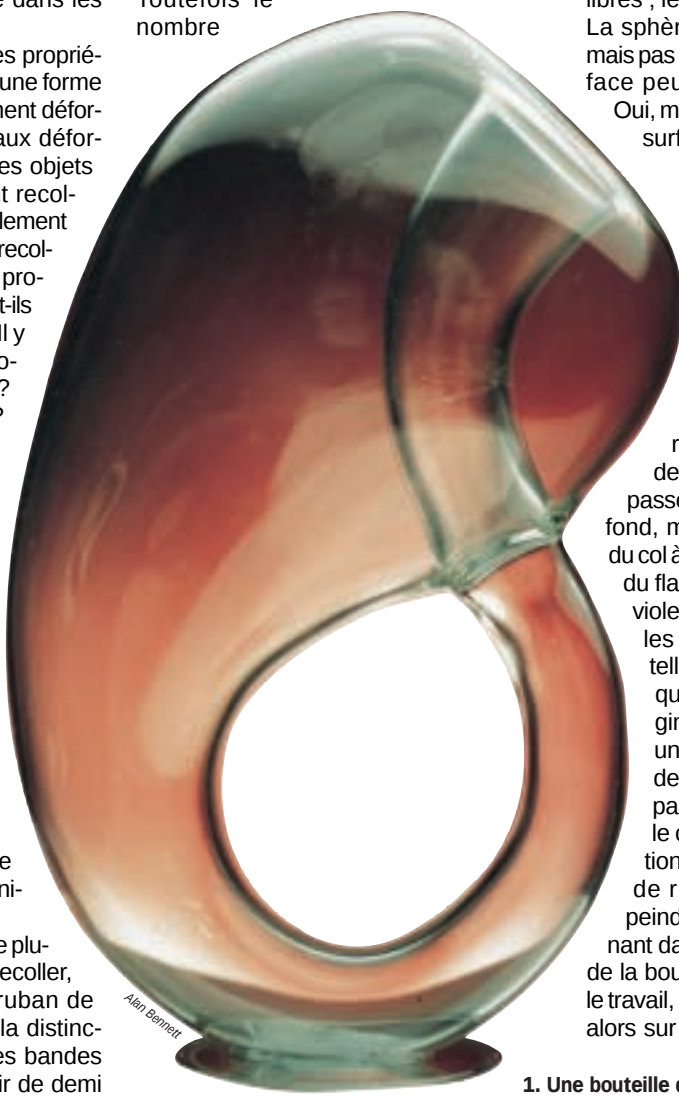
tours, et les bandes recollées après un nombre impair de demi tours ; les premières n'ont qu'une face, et les secondes en ont deux. Pour comprendre pourquoi, coupez une bande tordue de trois demi tours, par exemple ; puis, en conservant les deux coupures parallèles, déplacez l'une des extrémités afin de la dérouler (et non la détordre), avant de la ramener vers l'autre extrémité ; vous obtiendrez, par recollement, un ruban de Möbius, mais pas un simple cylindre. Toutefois le nombre

exact de demi torsions n'est pas sans importance : il détermine la façon dont la bande est plongée dans l'espace qui l'environne. La question de la géométrie intrinsèque de la bande est donc d'un autre ordre que la manière dont la bande est plongée dans l'espace. La première ne dépend que de la parité du nombre de demi tours, la seconde de la valeur exacte de ce nombre.

Le cylindre, obtenu par recollement d'une bande sans torsion, a deux bords libres ; le ruban de Möbius en a un seul. La sphère, en revanche, a deux faces mais pas de bord. Une surface à une seule face peut-elle ne pas avoir de bord ?

Oui, mais, dans notre espace, une telle surface se recoupe elle-même.

Cette particularité ne gêne pas les topologistes, dont c'est le métier d'imaginer des surfaces dans des espaces de dimensions supérieures ou, même, débarrassées des espaces où ces surfaces seraient plongées. En revanche, pour les souffleurs de verre, la difficulté est considérable. La figure 1 représente pourtant une bouteille de Klein en verre : le col a été étiré, passé à travers le flanc et recollé au fond, mais par l'intérieur. Le passage du col à travers le flanc sépare les points du flanc de façon permanente, ce qui viole les règles de la topologie, mais les topologistes admirent tant une telle matérialisation de leurs idées qu'ils ne s'en plaindront pas. Imaginons que nous voulions peindre une telle bouteille : nous partirions de l'extérieur du bulbe supérieur, par exemple, et descendrions vers le col. En arrivant à l'auto-intersection, nous poursuivrions comme si de rien n'était et continuerions à peindre le col, qui se trouve maintenant dans ce qui semble être l'intérieur de la bouteille. Toutefois, en poursuivant le travail, nous verrions que nous sommes alors sur la face « interne » du bulbe : ce



1. Une bouteille de Klein soufflée par Alan Bennett.