

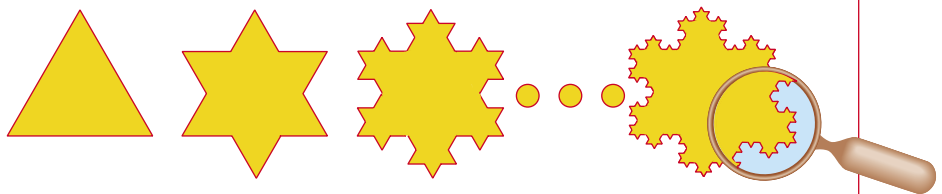
de la côte serait encore supérieure : ainsi, la longueur mesurée dépend de l'échelle. Au contraire, sur une courbe régulière formée de segments de droites ou de portions de courbes en nombre et en taille finis, la longueur mesurée tend vers une limite finie. Aussi l'augmentation de la longueur de la côte se poursuit-elle jusqu'à une certaine limite, où les objets physiques que nous observons finissent par devenir réguliers...

La courbe de von Koch a, quant à elle, une longueur infinie. En effet, à chaque étape de sa construction (voir l'encadré ci-contre), la longueur est multipliée par $4/3$ et, comme ce nombre est supérieur à 1, sa longueur tend vers l'infini. Cette courbe enferme cependant une aire finie : elle pourrait représenter une côte de Bretagne hypothétique, avec des golfes au fond desquels s'ouvriraient des baies, découpées elles-mêmes par des baies plus petites, et cela indéfiniment. Là apparaît l'analogie : l'objet mathématique obtenu par cette suite infinie d'opérations de découpage possède une parenté avec la côte de Bretagne.

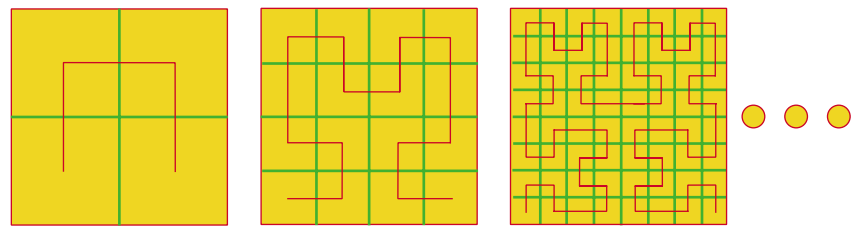
Il subsiste toutefois une nuance essentielle : la courbe de von Koch a été construite en répétant toujours la même opération, déterminée une fois pour toutes. Cette courbe est une fractale déterministe, le hasard n'intervenant nulle part dans l'opération. Or, sur la côte de Bretagne, le golfe du Morbihan n'est pas identique à la baie des Trépassés dilatée, mais la similarité est vraie statistiquement : tel golfe ressemble à telle baie agrandie, qui ressemble à telle anse, aussi agrandie... De même, les branches de chou-fleur ne sont pas exactement identiques, mais, par agrandissement, elles ressemblent au chou-fleur entier sans le reproduire exactement. La côte de Bretagne et le chou-fleur sont des fractales aléatoires.

Avant qu'ils ne soient baptisés fractals les mathématiciens avaient senti l'intérêt de ces objets et avaient étudié une de leurs caractéristiques : leur dimension. Dans la géométrie classique, une ligne est un objet à une dimension, une surface, un objet à deux dimensions, un volume, un objet à trois dimensions. Nous sommes ainsi habitués à des objets dont les dimensions sont des nombres entiers : 1, 2 ou 3. Un géomètre italien, Giuseppe Peano, avait construit, par étapes successives, une courbe de type fractal qui passait par tous les points d'un carré, c'est-à-

LES DIMENSIONS NON ENTIÈRES



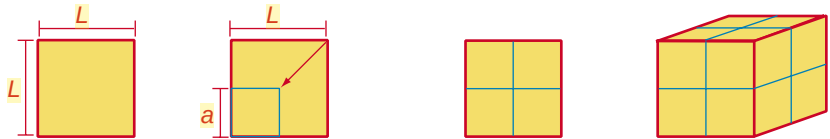
À chaque étape de la courbe de von Koch en flocon de neige, les segments du contour sont divisés en trois parties égales, et deux côtés d'un triangle équilatéral sont construits sur la partie centrale. Une partie grossie à la même structure qu'une partie du tout. La longueur de la courbe est infinie, l'aire finie.



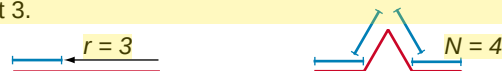
La courbe de Hilbert, après un nombre infini d'étapes, remplit tout le plan : on subodore qu'elle est de dimension 2, ce qui est exact selon la définition généralisée de la dimension, que nous allons examiner.



La longueur L d'un segment mesuré par une règle de longueur a est égale à $N.a$ où N est le nombre de règles mises bout à bout pour recouvrir le segment.

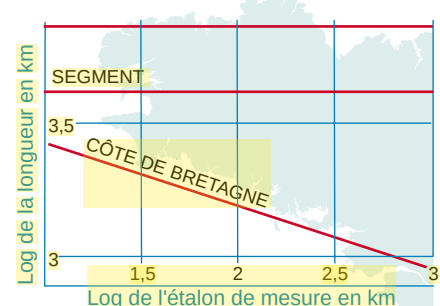


L'aire A d'un carré de côté L est égale à $N.a^2$, où r est le taux de réduction faisant passer du carré de côté L au carré de côté a ($r = L/a$). N est le nombre de petits carrés, de côté a , qui recouvrent le carré de côté L . Plus généralement, si la taille de l'étalon de mesure est réduit dans un rapport r , le nombre d'étalons qui recouvrent la grandeur à mesurer est multiplié par N et la dimension D est égale à $\log N / \log r$. Pour le segment, si l'étalon de mesure est divisé par 2, N est multiplié par 2, et la dimension D , égale à $\log 2 / \log 2$, vaut 1. Pour le carré, si l'étalon de mesure est divisé par 2, N est égal à 4, et la dimension D est égale à $\log 4 / \log 2$, soit 2, ce qui est bien la dimension habituelle d'une surface. De même pour le cube, si $r = 2$, $N = 8$ et D est égale à $\log 8 / \log 2$, soit 3.



Pour la courbe de von Koch, si l'on réduit la taille de l'étalon d'un rapport 3, la règle va mieux épouser le contour et mesurer la longueur du triangle équilatéral central de ce segment, qu'elle ignorait auparavant. Ici $N = 4$, et la dimension D de cette courbe est $\log 4 / \log 3$, soit 1,26... Par ce type de raisonnement, on justifie que la dimension de la courbe de Hilbert est égale à 2.

Historiquement, le mathématicien anglais Richardson a montré que, en mesurant une côte avec des étalons de mesure de plus en plus petits, la longueur de la côte varie linéairement sur une échelle doublement logarithmique : la dimension de la côte est approximativement égale à 1,25. La côte est une fractale.



dire «remplissait» tout le carré. Était-elle de dimension 1 comme une courbe ou de dimension 2 comme une surface? Une variante de cette courbe conçue par Hilbert est représentée dans l'encadré de la page précédente. Pour élucider l'énigme, les mathématiciens ont généralisé la notion de dimension à des valeurs non entières : la courbe de von Koch a la dimension $\log 4 / \log 3$, soit 1,26. Bien sûr, vous l'avez deviné, la courbe de Hilbert a la dimension 2.

Un autre exemple de fractale est apparu lors de la recherche d'un béton optimisé. Les entrepreneurs veulent un bon remplissage de l'espace, et les fabricants de béton cherchent à remplir un volume par des assemblages de galets, cailloux, gravillons, sables et poudres de plus en plus fins pour diminuer la proportion de ciments. Cette configuration est celle des sphères apolloniennes (figure 5).

Le comportement des objets physiques dépend de leur dimension fractale ainsi définie. Montrons maintenant comment des processus physiques très courants peuvent engendrer des fractales. L'un d'entre eux est le mouvement brownien des molécules et des atomes qui assure la diffusion des particules ; ces phénomènes aléatoires structurent certaines formes, et la géométrie de l'aléatoire est la géométrie fractale.

Des processus de croissance désordonnés se retrouvent partout, dans la forme des arbres, les figures de croissance des arbres ou dans les figures que dessine la foudre. Un exemple est l'agrégation limitée par la diffusion qui donne des agrégats. Imaginons un fluide où sont disséminées des particules ; ces particules diffusent selon les trajectoires aléatoires du mouvement brownien et se collent pour former des agrégats. C'est le phénomène banal de l'obturation des filtres à poussière : des grains de poussière se col-



2. Paysage de montagne nuageux. En haut à droite un modèle fractal du poumon.

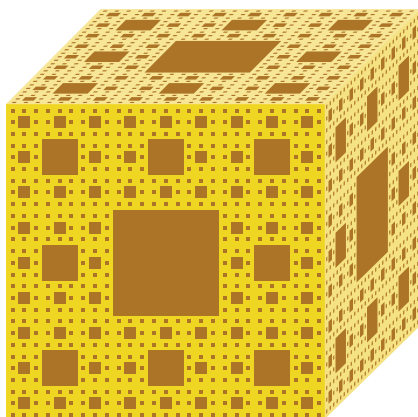
lent sur les mailles du filtre, puis des grains se fixent sur les agrégats déjà formés, etc. Ces formations, parfaitement reproductibles par ordinateurs, décrivent aussi la formation des agrégats de noir de carbone utilisés pour augmenter la durée de vie des pneumatiques, la formation des poussières atmosphériques, les croissances de bactéries, la filtration des liquides dans les milieux poreux, et bien d'autres encore. Un processus très simple donne des morphologies extrêmement compliquées, mais hiérarchisées : très souvent l'aléatoire donne des géométries plus simples qu'on ne le croyait.

L'universalité des fractales n'est alors plus surprenante : les propriétés de nombreux processus vitaux comme la respiration, l'assimilation des aliments ou l'élimination des toxines, dépendent de ce mouvement aléatoire des molécules et des particules.

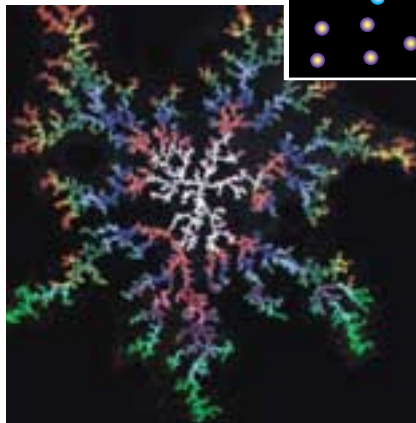
«La nature imite l'art», écrivait Oscar Wilde : aussi n'est-il pas étonnant, *a posteriori*, que si les processus naturels donnent naissance à des fractales, les formes naturelles puissent être reconstituées par des fractales. Les logiciels graphiques utilisent les fractales pour reconstituer des paysages. Il serait amusant d'effectuer des tests en double aveugle, pour voir si un observateur peut distinguer les paysages artificiels et les paysages naturels...

Ces points de vue changent notre approche scientifique. Longtemps nous avons cru que le macroscopique était explicable par une meilleure compréhension du microscopique. L'identité de structure de la partie et du tout modifie notre vision de la physique et dramatise une certaine impuissance du réductionnisme classique à expliquer certains phénomènes naturels.

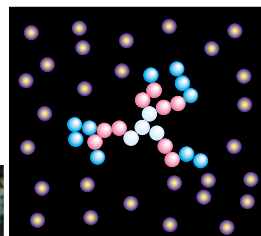
Bernard SAPOVAL est professeur de physique à l'École Polytechnique



3. L'éponge fractale de Webern.



4. Le résultat d'un processus d'agrégation.



5. Les sphères apolloniennes.