



Les conquêtes des polyminos

JEAN-PAUL DELAHAYE

Dans certains domaines mathématiques comme les polyminos, amateurs et informaticiens éclairés font avancer les connaissances.

Le domino est composé de deux carrés accolés par un côté. Les polyminos (parfois appelés polyominos) qui en réunissent 3 sont dénommés triminos ; 4, quadriminos ; 5, pentamino ; 6, hexamino ; 7, heptamino.

Depuis que Solomon Golomb les a présentés au monde scientifique, en 1953, lors d'une conférence au Club mathématique d'Harvard, et que Martin Gardner en 1957, dans un de ses premiers articles de récréation mathématique de *Scientific American*, en a fait la publicité, une «culture du polymino» s'est développée, donnant lieu à des centaines d'articles, à une multitude de jeux et de casse-tête, et un grand nombre de sites Internet leur sont consacrés. Des artistes comme Guenter Albrecht-Buehler les uti-

lisent dans leurs œuvres. Ce peintre expose ses tableaux, comme celui représenté en haut de la page, à l'adresse : <http://pubweb.acns.nwu.edu/~gbuehler/>

Dans l'introduction de son livre entièrement dédié aux résultats des recherches sur les polyminos et dont une édition augmentée a été publiée il y a peu, S. Golomb explique : «Après la conférence de 1953, je me suis trouvé irrévocablement lié à tout ce qui pouvait leur arriver. Un flot continu et soutenu de correspondants du monde entier et de toutes les strates de la société – présidents d'Université, pensionnaires d'obscurs monastères ou de célèbres pénitenciers, etc. – m'ont demandé des informations, proposé de nouveaux problèmes ou fourni des nouvelles solutions.»

Même s'il existe des traces de ces remarquables figures géométriques dans un livre, publié en 1907, d'Henry Ernest Dudeney, le célèbre créateur de jeux mathématiques anglais, même si, quelques siècles plus tôt, un maître du jeu de go remarqua qu'on pouvait créer 12 formes différentes composées de 5 carrés accolés par un côté au moins (pentamino), ce n'est que depuis la fameuse conférence qu'on les a considérés avec quelque sérieux.

Dans une version initiale du film *2001, l'Odyssée de l'espace*, de Stanley Kubrick, une scène mettait en lice un acteur qui jouait aux pentamino avec l'ordinateur (cette scène fut remplacée au dernier moment par une partie d'échecs).

Le succès des polyminos est sans doute dû à ce qu'on les étudie sans formules. La démonstration d'une de leurs propriétés consiste le plus souvent en l'évidence d'un dessin (ça existe, je le vois !). Lorsqu'on prouve qu'une certaine configuration est impossible, il s'agit d'un exercice d'astuce et de pure logique qu'on pourra suivre sans aucune préparation mathématique, et que l'on comprendra en s'aidant de pièces en bois ou en carton plutôt qu'avec un crayon et une feuille de papier. Les mathématiciens sont ici essentiellement un jeu.

Certaines propriétés obtenues par énumération ne peuvent pas être démontrées par un raisonnement direct, et alors c'est un programme (l'écrire est encore un jeu) qui établit le résultat. Tel est le cas d'un théorème énonçant qu'il y a 1 010 façons de remplir (on dit aussi paver) un rectangle de 12×5 avec les 12 pentamino, qu'il existe 2 339 façons pour le rectangle 6×10 , 368 pour le rectangle 4×15 , et 2 seulement pour le rectangle 3×20 .

Le livre de George Martin (voir la bibliographie à la fin de l'article) sur les polyminos paru en 1996 est composé uniquement de tels petits problèmes, qui pourront occuper les amateurs pendant

1. DÉNOMBREMENTS

Aucune méthode générale ne permet de déterminer le nombre de polyminos composés de n carrés. Dans ces dénombrements, on considère bien sûr comme identiques deux polyminos obtenus par retournement ou rotation. Les nombres de polyminos connus aujourd'hui ont été calculés par dénombrements exhaustifs à l'aide de programmes :

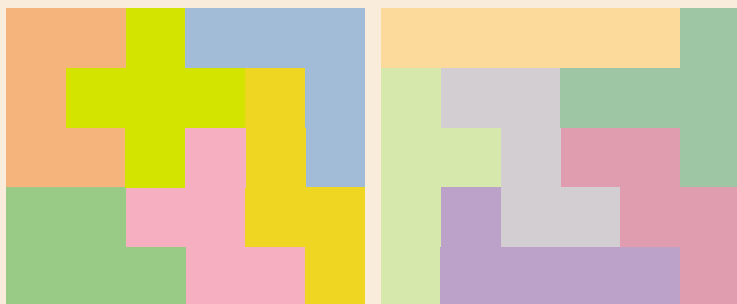
n	Nombre $P(n)$ de polyminos à n carrés	n	Nombre $P(n)$ de polyminos à n carrés
1	1	13	238591
2	1	14	901971
3	2	15	3426576
4	5	16	13079255
5	12	17	50107909
6	35	18	192622052
7	108	19	742624232
8	369	20	2870671950
9	1285	21	11123060678
10	4655	22	43191857688
11	17073	23	168047007728
12	63600	24	654999700403

David Klarner a démontré qu'il existe une constante telle que $P(n) \sim n^k$ à l'infini. Cette constante de Klarner est très mal connue aujourd'hui, on sait seulement qu'elle est comprise entre 3,72 (D. Klarner, W. Satterfield) et 4,65 (D. Klarner, R. Rivest) :

$$n^{3,72} < P(n) < n^{4,65}$$

2. LES TROIS TYPES DE RAISONNEMENTS SUR LES POLYMINOS

(a)



Raisonnement par "exhibition d'une figure" : on montre une figure qui vous persuade en quelques secondes du résultat annoncé. Les figures solutions sont en général difficiles à trouver.

Exemples d'énoncés prouvables par exhibition :

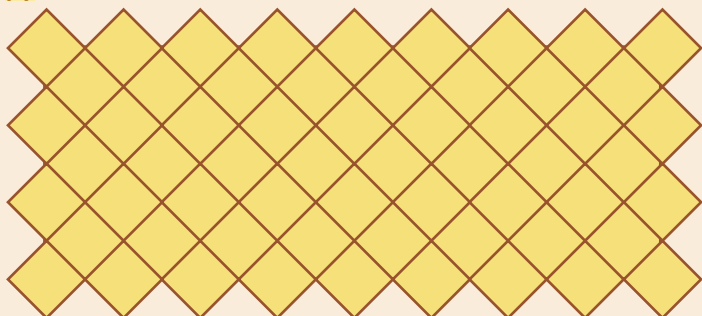
"Il existe un assemblage des 12 pentaminos en deux rectangles de taille 6×5 " (a).

"Il existe une forme géométrique de 20 carrés de surface telle qu'en utilisant chaque pentamino une fois, et une fois seulement, on obtient trois exemplaires de cette forme" (b).

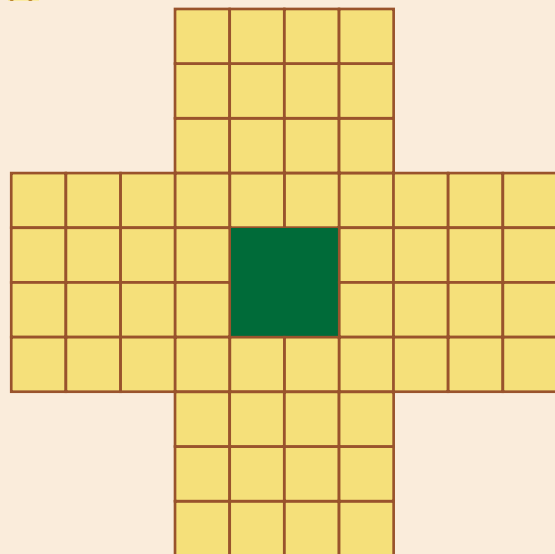
(b)



(c)



(d)



Raisonnement par astuce et logique : une démonstration difficile à trouver, mais facile à vérifier, établit le résultat.

Exemples de résultats prouvables par astuce et logique :

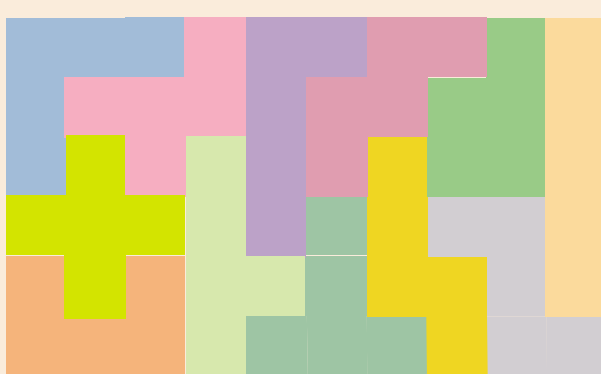
"Le rectangle en zigzag ne peut être recouvert par les 12 pentaminos" (c).

"Les 12 pentaminos ne peuvent remplir la croix de Herbert Taylor (croix de 3×4 pour les bouts avec un centre de 4×4 , moins 2×2 pour la partie centrale)" (d).

(e)



(f)



Raisonnement assisté par ordinateur : "Il existe seulement deux assemblages (e) et (f) des 12 pentaminos en un rectangle 5×12 qui possèdent la propriété que chaque pièce touche le bord."