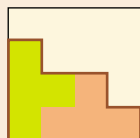
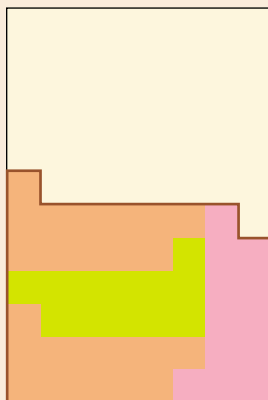


3. LES POLYMINOS D'ORDRE RECTANGULAIRE

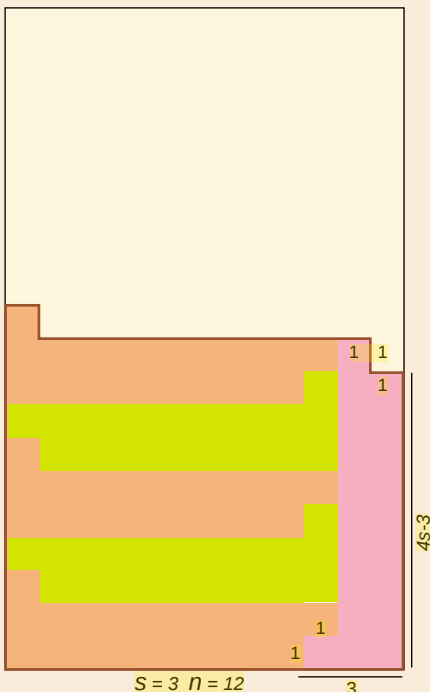


$S = 1 \quad n = 4$

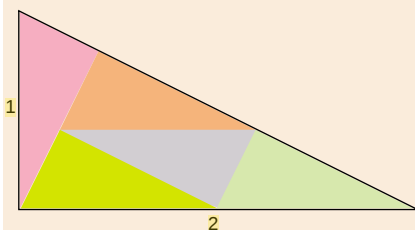


$S = 2 \quad n = 8$

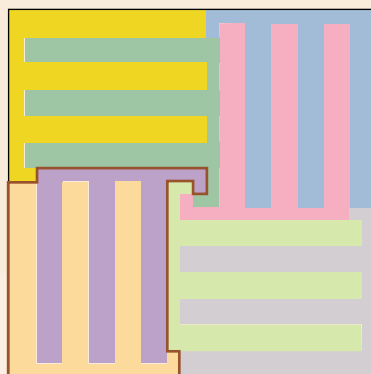
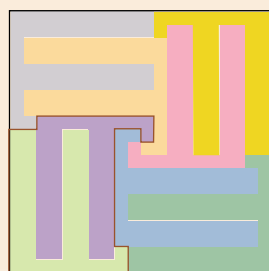
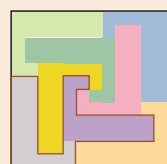
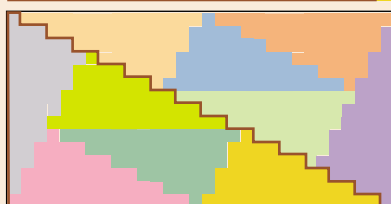
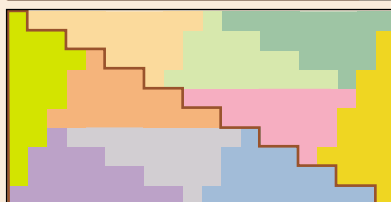
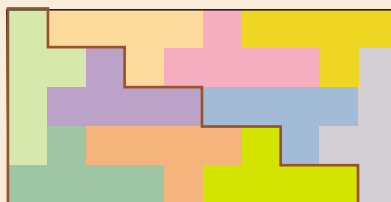
Un nombre n est rectangulaire s'il existe un polymino dont n exemplaires pavent un rectangle (sans trou ni chevauchement, bien sûr), et dont moins de n exemplaires ne pavent aucun rectangle. Solomon Golomb a montré par la méthode illustrée ici qu'un nombre n multiple de 4 ($n = 4s$) est rectangulaire.



$S = 3 \quad n = 12$



Une méthode découverte en 1997 par William Marshall montre que les nombres de la forme $2(a^2 + b^2)$ sont rectangulaires quand a et b n'ont pas de facteurs communs. À partir du découpage d'un triangle rectangle en 5 sous-rectangles, cette méthode permet de construire des polyminos d'ordre rectangulaire 10. Ici $a = 1$ et $b = 2$.



Polyminos de Michael Reid, recouvrant des rectangles et n'appartenant pas aux classes de Golomb et Marshall.

des mois et servir de base à l'organisation de cours de mathématiques amusantes susceptibles de faire aimer cette discipline, moins austère qu'on ne le pense.

LES POLYMINOS RECTANGULABLES

La question du pavage des rectangles avec un même polymino (et non plus avec un exemplaire de chaque type comme dans les problèmes de pentaminos cités précédemment) est un problème remarquablement difficile qu'on étudie depuis plus de 30 ans, obtenant lentement des résultats sous la forme de belles figures inattendues et de constructions astucieuses.

Les polyminos dont on peut regrouper des copies pour faire un rectangle sont appelés rectangulaires.

Le pentamino L (quatre carrés alignés, avec un cinquième collé à angle droit au bout de la ligne) est bien sûr rectangulaire, car deux copies du L peuvent s'imbriquer l'une dans l'autre et former un rectangle de taille 2×5 .

Le plus petit nombre, n , de copies d'un polymino qui permet de composer un rectangle est appelé son ordre-rectangulaire. Si n est l'ordre-rectangulaire d'un polymino, le nombre n est rectangulaire. Ainsi le pentamino L est rectangulaire et a un ordre-rectangulaire 2. Le nombre 2 est donc un nombre rectangulaire.

LES NOMBRES RECTANGULABLES

Les nombres 1 et 2 sont rectangulaires. Le nombre 3 n'est pas rectangulaire : un rectangle ne se décomposera jamais en trois polyminos identiques, à moins que ce ne soient des rectangles (dont l'ordre-rectangulaire est 1). Ce résultat n'est pas du tout évident, il n'a été démontré qu'en 1992 par I. Stewart et A. Wormstein. Il a été généralisé en 1994 par S. Maltby : un rectangle ne peut être décomposé en trois figures identiques, polyminos ou non, que si ce sont des rectangles.

Des figures élémentaires montrent que 4 est un nombre rectangulaire : certains polyminos (voir la figure 3) pris en 4 exemplaires composent un rectangle, alors qu'en en prenant moins que 4 on ne peut pas faire de rectangle. On ignore si 5, 6 et 7 sont des nombres rectangulaires.

Deux constructions générales donnent des familles infinies des nombres rectangulaires. La première, proposée par S. Golomb en 1987, établit que tous les multiples de 4 sont rectangulaires. La seconde, découverte il y a quelques mois par le mathématicien amateur néo-zélandais W. R. Marshall, est merveilleuse de simplicité et de puissance.

Elle indique que tous les nombres de la forme $2(a^2 + b^2)$, lorsque a et b n'ont pas de facteurs communs, sont rectangulaires. La construction, fondée sur le découpage d'un triangle rectangle en triangles rectangles identiques, est la preuve que l'astuce d'un amateur peut, dans ce domaine, faire progresser la connaissance d'une question difficile plus efficacement que le plus puissant des ordinateurs et que les théories mathématiques les plus savantes.

Quelques constructions ne provenant pas de ces deux séries (et appelées sporadiques) ont aussi été découvertes : 138 et 690, sont des nombres rectangulaires (pour 690 le résultat doit être confirmé, car la vérification complète que le polymino qui donne 690 ne peut pas remplir un rectangle de plus petite taille n'a pas été menée entièrement).

Notre connaissance aujourd'hui des nombres rectangulaires inférieurs à 100 se résume assez simplement. On sait que 2 est rectangulaire. On sait que 3 ne l'est pas. On sait que les multiples de 4 le sont. Et l'on sait, de plus, grâce au résultat de W. Marshall, que $10 = 2(1^2 + 2^2)$, $26 = 2(2^2 + 3^2)$, $34 = 2(1^2 + 4^2)$, $50 = 2(3^2 + 4^2)$, $58 = 2(2^2 + 5^2)$, $74 = 2(1^2 + 6^2)$, $90 = 2(3^2 + 6^2)$ sont des nombres rectangulaires. Pour tous les autres nombres inférieurs à 100, on est dans l'ignorance.

Certains polyminos assez simples ont un ordre-rectangulaire élevé, ce qui est remarquable et jamais facile à établir, car il faut pour cela (i) montrer la figure complexe d'un rectangle découpé en petits morceaux identiques selon un schéma peu évident et, (ii) prouver qu'on ne peut pas paver un rectangle plus petit avec ce même polymino, preuve qui nécessite le plus souvent l'aide de l'informatique.

Parmi toutes les questions ouvertes concernant la rectangularité des nombres, notons les très simples suivantes :

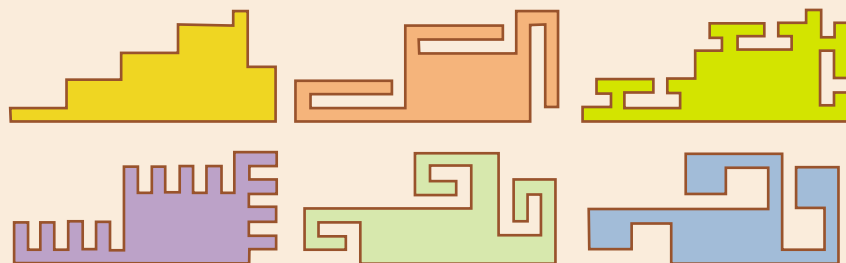
- existe-t-il des polyminos d'ordre-rectangulaire 6? dit autrement, 6 est-il rectangulaire? (et plus généralement existe-t-il un nombre rectangulaire de la forme $8k + 6$?)

- existe-t-il des polyminos d'ordre-rectangulaire impair?

La question concernant les nombres impairs est particulièrement lancinante, puisqu'il se pourrait qu'aucun nombre impair ne soit rectangulaire. Si c'était le cas, on aurait le beau théorème (qui pour l'instant n'est qu'une conjecture) : si avec un nombre impair d'exemplaires d'un même polymino on peut composer un rectangle, alors il existe un nombre pair d'exemplaires du même polymino qui remplit un rectangle plus petit.

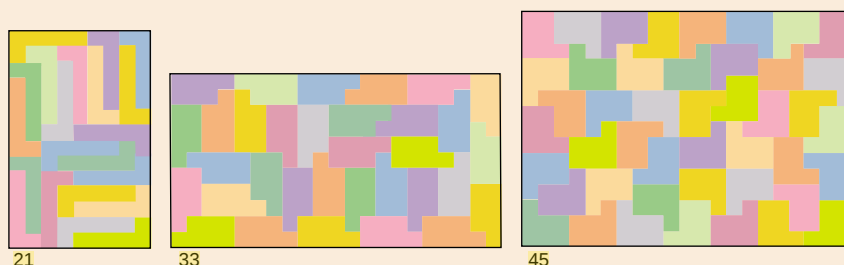
Michael Reid, spécialiste de ces questions et découvreur de belles figures de

4. POLYMINOS D'ORDRE RECTANGULAIRE 10



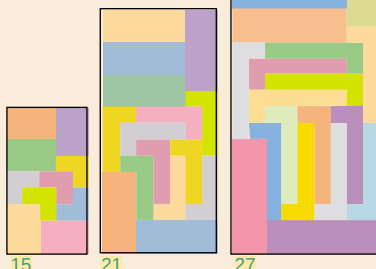
Quelques polyminos d'ordre rectangulaire 10.

5. PAVAGES D'UN RECTANGLE PAR UN NOMBRE IMPAIR DE POLYMINOS



153

FAMILLE $3(2n + 1)$



15

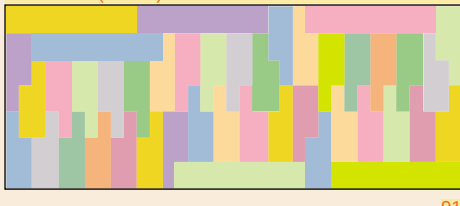
21

27

Un nombre impair d'exemplaires d'un même polymino peut composer un rectangle. Ces découpages impairs ne sont jamais évidents. Voici quelques-uns de ces découpages, découverts par Michael Reid et W. Marshall.

FAMILLE $7(6n + 1)$

49



91

