

Elle indique que tous les nombres de la forme $2(a^2 + b^2)$, lorsque a et b n'ont pas de facteurs communs, sont rectangulaires. La construction, fondée sur le découpage d'un triangle rectangle en triangles rectangles identiques, est la preuve que l'astuce d'un amateur peut, dans ce domaine, faire progresser la connaissance d'une question difficile plus efficacement que le plus puissant des ordinateurs et que les théories mathématiques les plus savantes.

Quelques constructions ne provenant pas de ces deux séries (et appelées sporadiques) ont aussi été découvertes : 138 et 690, sont des nombres rectangulaires (pour 690 le résultat doit être confirmé, car la vérification complète que le polymino qui donne 690 ne peut pas remplir un rectangle de plus petite taille n'a pas été menée entièrement).

Notre connaissance aujourd'hui des nombres rectangulaires inférieurs à 100 se résume assez simplement. On sait que 2 est rectangulaire. On sait que 3 ne l'est pas. On sait que les multiples de 4 le sont. Et l'on sait, de plus, grâce au résultat de W. Marshall, que $10 = 2(1^2 + 2^2)$, $26 = 2(2^2 + 3^2)$, $34 = 2(1^2 + 4^2)$, $50 = 2(3^2 + 4^2)$, $58 = 2(2^2 + 5^2)$, $74 = 2(1^2 + 6^2)$, $90 = 2(3^2 + 6^2)$ sont des nombres rectangulaires. Pour tous les autres nombres inférieurs à 100, on est dans l'ignorance.

Certains polyminos assez simples ont un ordre-rectangulaire élevé, ce qui est remarquable et jamais facile à établir, car il faut pour cela (i) montrer la figure complexe d'un rectangle découpé en petits morceaux identiques selon un schéma peu évident et, (ii) prouver qu'on ne peut pas paver un rectangle plus petit avec ce même polymino, preuve qui nécessite le plus souvent l'aide de l'informatique.

Parmi toutes les questions ouvertes concernant la rectangularité des nombres, notons les très simples suivantes :

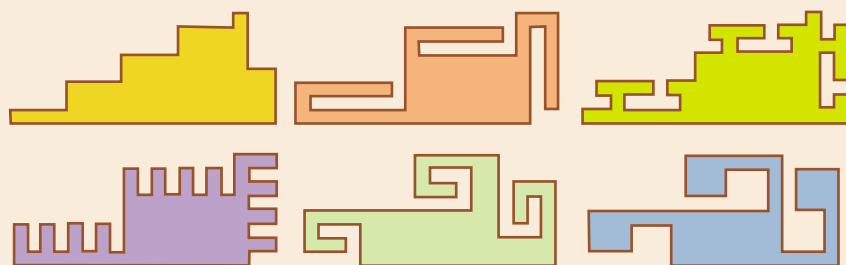
- existe-t-il des polyminos d'ordre-rectangulaire 6? dit autrement, 6 est-il rectangulaire? (et plus généralement existe-t-il un nombre rectangulaire de la forme $8k + 6$?).

- existe-t-il des polyminos d'ordre-rectangulaire impair?

La question concernant les nombres impairs est particulièrement lancinante, puisqu'il se pourrait qu'aucun nombre impair ne soit rectangulaire. Si c'était le cas, on aurait le beau théorème (qui pour l'instant n'est qu'une conjecture) : si avec un nombre impair d'exemplaires d'un même polymino on peut composer un rectangle, alors il existe un nombre pair d'exemplaires du même polymino qui remplit un rectangle plus petit.

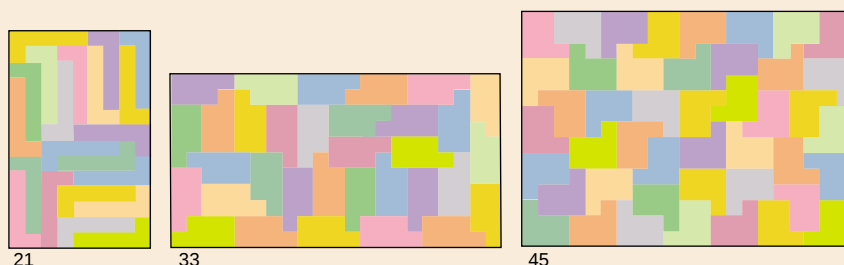
Michael Reid, spécialiste de ces questions et découvreur de belles figures de

4. POLYMINOS D'ORDRE RECTANGULAIRE 10



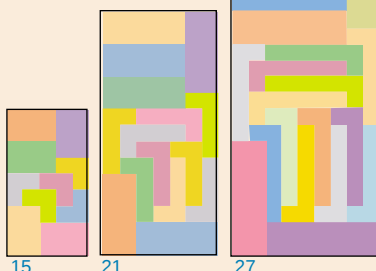
Quelques polyminos d'ordre rectangulaire 10.

5. PAVAGES D'UN RECTANGLE PAR UN NOMBRE IMPAIR DE POLYMINOS



153

FAMILLE $3(2n + 1)$



15

21

27

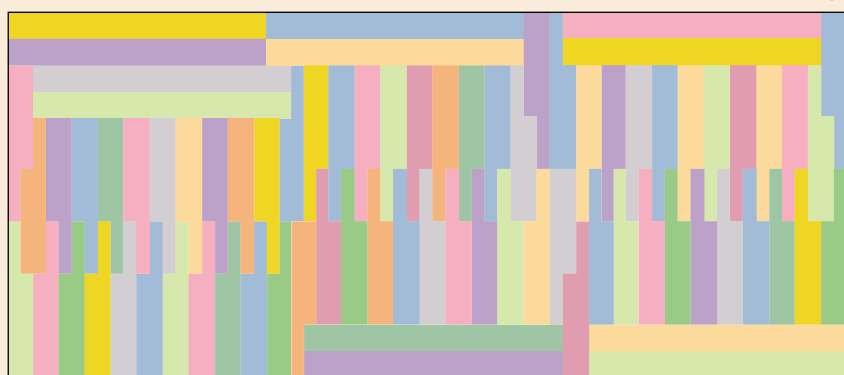
Un nombre impair d'exemplaires d'un même polymino peut composer un rectangle. Ces découpages impairs ne sont jamais évidents. Voici quelques-uns de ces découpages, découverts par Michael Reid et W. Marshall.

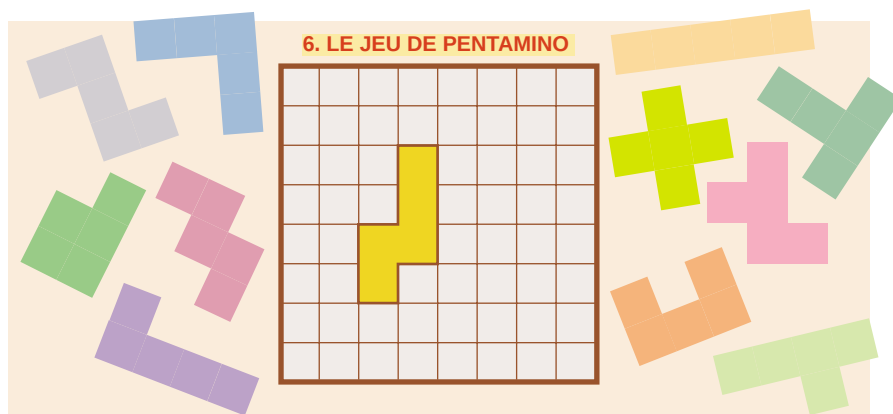
FAMILLE $7(6n + 1)$

49



91





6. LE JEU DE PENTAMINO

Au jeu du pentamino, le joueur qui commence gagne.

Règle du jeu.

- Deux joueurs s'affrontent sur un échiquier 8×8 en utilisant les douze pentaminos comme pièces.
- Les joueurs jouent chacun à leur tour, plaçant sur l'échiquier l'un des pentaminos non encore placés, de façon à recouvrir des cases vides.
- Lorsque plus aucune pièce ne peut être déposée, celui des joueurs à qui c'est le tour de jouer a perdu.

H. Orman, après un calcul de plusieurs semaines sur plusieurs ordinateurs, a établi que le joueur qui commence peut gagner s'il place le pentamino en Z, comme indiqué sur la figure.

pavages, soupçonne que la conjecture est fautive. Un lecteur de *Pour La Science* saura-t-il la résoudre, en proposant un polymino dont un nombre impair de copies remplit un rectangle sans qu'un nombre pair plus petit fasse de même ?

M. Reid considère aussi que trouver de nouveaux polyminos rectangulaires est un terrible défi qu'il faut pourtant relever pour avancer dans la compréhension de ce domaine de la géométrie élémentaire. Il serait très utile de connaître tout ce qu'il en est des polyminos les plus simples : par exemple, les polyminos rectangulaires de taille inférieure à 100, et ceux qui ne le sont pas. Une telle question est aujourd'hui totalement hors de notre portée, et les programmes (écrits par M. Reid, entre autres) qui fonctionnent en permanence à la recherche de nouveaux polyminos rectangulaires ne soulèvent que très lentement le voile.

L'étude des décompositions d'un rectangle en un nombre impair de polyminos est un autre problème difficile où des résultats intéressants ont été trouvés récemment. David Klarner proposa d'appeler polymino impair un polymino dont un nombre impair de copies peut composer un rectangle (ici, on n'impose pas que le nombre impair soit le nombre minimal d'exemplaires permettant de composer un rectangle, sinon on serait ramené à la question non résolue de savoir s'il y a des nombres rectangulaires impairs). La figure 5 donne quelques-unes des belles décompositions obtenues.

UN RÉSULTAT DE THÉORIE DES JEUX

Récemment un autre progrès remarquable a été fait concernant les polyminos. La question de l'existence d'une stratégie gagnante au jeu des pentaminos du film *2001*, posée il y a plus de 30 ans par S. Golomb, a été résolue à la suite d'une série de calculs colossaux.

Rappelons les règles du jeu : deux joueurs s'affrontent sur un échiquier 8×8 en utilisant les 12 pentaminos comme pions, qui sont placés à côté de l'échiquier au début du jeu. Les joueurs jouent chacun à leur tour, prenant une pièce de leur choix parmi les restantes, la posant sur l'échiquier et venant occuper des cases vides de celui-ci. Cela, jusqu'à ce que plus aucune pièce ne puisse être déposée. Celui des joueurs qui se trouve dans l'impossibilité de jouer a perdu.

À l'Université d'Arizona, Hilarie Orman a programmé une étude du jeu fondée sur l'idée qu'en plaçant le pentamino en L au milieu on limitait le nombre de possibilités de jeu de l'adversaire. Le calcul a duré plusieurs mois utilisant de nombreuses machines (une machine *Intel Paragon*, 6 *Hewlett-Packard 720*, 4 *Digital Equipment Corporation RS 3000 model 600*).

L'espoir de H. Orman était que, pour chacune des 1 181 répliques possibles du second joueur, une réplique gagnante soit découverte par son programme. Malheureusement le programme découvrit que deux réponses permettaient à l'adversaire de se retrouver dans une position gagnante : en plaçant le L au centre, le joueur qui

commence perd contre un joueur averti. La question subsistait : existe-t-il d'autres façons de commencer qui assurent au premier joueur de gagner contre toute défense ? Le programme de H. Orman ne pouvait considérer tous les premiers coups possibles, car le calcul aurait duré plus de dix ans ! C'est pourquoi elle avait fait le pari (perdu) que placer le L au centre était une bonne façon de jouer pour le premier joueur. Opiniâtre, Hilarie ne se découragea pas et entreprit une seconde tentative (après une phase de perfectionnement du programme), cette fois en imaginant que le premier joueur pose le Z. La réponse obtenue, en deux semaines, est que, pour ce premier coup, aucune réplique gagnante n'existe. Le joueur qui commence peut gagner de manière certaine au jeu inventé par S. Golomb en plaçant le Z au centre. Signalons que le résultat a été vérifié par un programme de Richard Schroepel, totalement indépendant du premier.

Notons aussi qu'une fois le calcul fait, un ordinateur n'a pas besoin de refaire tout le calcul pour chaque partie : l'utilisation de certaines données stockées en cours du calcul lui permet de savoir comment jouer à coup sûr.

Des deux jeux envisagés par S. Kubrick «humain contre ordinateur», dans *2001, Odyssée de l'espace*, aucun n'a résisté à la machine jusqu'au XXI^e siècle. L'homme perd au jeu d'échecs, comme le match Kasparov-Deeper Blue de mai 1997 l'a montré, et perd au jeu de pentamino (là, l'ordinateur a complètement résolu le jeu en indiquant la tactique gagnante et lui a, ce faisant, enlevé tout intérêt).

M. Gardner, *Hexaflexagons and other Mathematical Diversions*, The University of Chicago Press, Chicago, 1988.

I. Stewart, *Pavages et tâtonnements*, in *Pour La Science*, pp. 94-99, avril 1990.

S. W. Golomb, *Polyominoes. Puzzles, Patterns, Problems and Packing*, Princeton Science Library, Princeton, 1994-1996.

S. W. Golomb, *Tiling Rectangles with Polyominoes*, in *The Mathematical Intelligencer*, 18, 2, pp. 38-46, 1996.

W. R. Marshall, *Packing Rectangles with Congruent Polyominoes*, in *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 77, 2, pp. 181-192, 1997.

G. E. Martin, *Polyominoes. A Guide to Puzzles and Problems in Tiling*, in *The Mathematical Association of America, Spectrum Series*, 1996.

H. K. Orman, *Pentominoes : A First Player Win*, in *Game of No Chance*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

M. Reid, *Tiling Rectangles and Half Strips with Congruent Polyominoes*, in *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 80, 1, 1997.