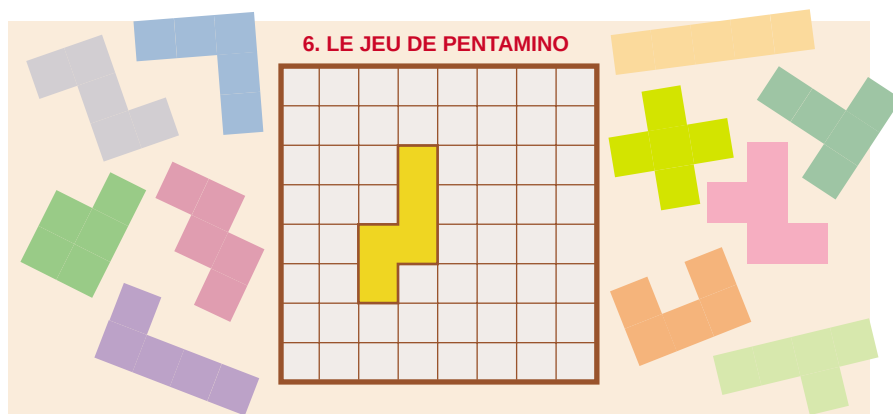




6. LE JEU DE PENTAMINO

Au jeu du pentamino, le joueur qui commence gagne.

Règle du jeu.

- Deux joueurs s'affrontent sur un échiquier 8×8 en utilisant les douze pentaminos comme pièces.
- Les joueurs jouent chacun à leur tour, plaçant sur l'échiquier l'un des pentaminos non encore placés, de façon à recouvrir des cases vides.
- Lorsque plus aucune pièce ne peut être déposée, celui des joueurs à qui c'est le tour de jouer a perdu.

H. Orman, après un calcul de plusieurs semaines sur plusieurs ordinateurs, a établi que le joueur qui commence peut gagner s'il place le pentamino en Z, comme indiqué sur la figure.

pavages, soupçonne que la conjecture est fausse. Un lecteur de *Pour La Science* saura-t-il la résoudre, en proposant un polymino dont un nombre impair de copies remplit un rectangle sans qu'un nombre pair plus petit fasse de même ?

M. Reid considère aussi que trouver de nouveaux polyminos rectangulaires est un terrible défi qu'il faut pourtant relever pour avancer dans la compréhension de ce domaine de la géométrie élémentaire. Il serait très utile de connaître tout ce qu'il en est des polyminos les plus simples : par exemple, les polyminos rectangulaires de taille inférieure à 100, et ceux qui ne le sont pas. Une telle question est aujourd'hui totalement hors de notre portée, et les programmes (écrits par M. Reid, entre autres) qui fonctionnent en permanence à la recherche de nouveaux polyminos rectangulaires ne soulèvent que très lentement le voile.

L'étude des décompositions d'un rectangle en un nombre impair de polyminos est un autre problème difficile où des résultats intéressants ont été trouvés récemment. David Klarner proposa d'appeler polymino impair un polymino dont un nombre impair de copies peut composer un rectangle (ici, on n'impose pas que le nombre impair soit le nombre minimal d'exemplaires permettant de composer un rectangle, sinon on serait ramené à la question non résolue de savoir s'il y a des nombres rectangulaires impairs). La figure 5 donne quelques-unes des belles décompositions obtenues.

UN RÉSULTAT DE THÉORIE DES JEUX

Récemment un autre progrès remarquable a été fait concernant les polyminos. La question de l'existence d'une stratégie gagnante au jeu des pentaminos du film *2001*, posée il y a plus de 30 ans par S. Golomb, a été résolue à la suite d'une série de calculs colossaux.

Rappelons les règles du jeu : deux joueurs s'affrontent sur un échiquier 8×8 en utilisant les 12 pentaminos comme pions, qui sont placés à côté de l'échiquier au début du jeu. Les joueurs jouent chacun à leur tour, prenant une pièce de leur choix parmi les restantes, la posant sur l'échiquier et venant occuper des cases vides de celui-ci. Cela, jusqu'à ce que plus aucune pièce ne puisse être déposée. Celui des joueurs qui se trouve dans l'impossibilité de jouer a perdu.

À l'Université d'Arizona, Hilarie Orman a programmé une étude du jeu fondée sur l'idée qu'en plaçant le pentamino en L au milieu on limitait le nombre de possibilités de jeu de l'adversaire. Le calcul a duré plusieurs mois utilisant de nombreuses machines (une machine *Intel Paragon*, 6 *Hewlett-Packard 720*, 4 *Digital Equipment Corporation RS 3000 model 600*).

L'espoir de H. Orman était que, pour chacune des 1 181 répliques possibles du second joueur, une réplique gagnante soit découverte par son programme. Malheureusement le programme découvrit que deux réponses permettaient à l'adversaire de se retrouver dans une position gagnante : en plaçant le L au centre, le joueur qui

commence perd contre un joueur averti. La question subsistait : existe-t-il d'autres façons de commencer qui assurent au premier joueur de gagner contre toute défense ? Le programme de H. Orman ne pouvait considérer tous les premiers coups possibles, car le calcul aurait duré plus de dix ans ! C'est pourquoi elle avait fait le pari (perdu) que placer le L au centre était une bonne façon de jouer pour le premier joueur. Opiniâtre, Hilarie ne se découragea pas et entreprit une seconde tentative (après une phase de perfectionnement du programme), cette fois en imaginant que le premier joueur pose le Z. La réponse obtenue, en deux semaines, est que, pour ce premier coup, aucune réplique gagnante n'existe. Le joueur qui commence peut gagner de manière certaine au jeu inventé par S. Golomb en plaçant le Z au centre. Signalons que le résultat a été vérifié par un programme de Richard Schroepel, totalement indépendant du premier.

Notons aussi qu'une fois le calcul fait, un ordinateur n'a pas besoin de refaire tout le calcul pour chaque partie : l'utilisation de certaines données stockées en cours du calcul lui permet de savoir comment jouer à coup sûr.

Des deux jeux envisagés par S. Kubrick «humain contre ordinateur», dans *2001, Odyssée de l'espace*, aucun n'a résisté à la machine jusqu'au XXI^e siècle. L'homme perd au jeu d'échecs, comme le match Kasparov-Deeper Blue de mai 1997 l'a montré, et perd au jeu de pentamino (là, l'ordinateur a complètement résolu le jeu en indiquant la tactique gagnante et lui a, ce faisant, enlevé tout intérêt).

M. Gardner, *Hexaflexagons and other Mathematical Diversions*, The University of Chicago Press, Chicago, 1988.

I. Stewart, *Pavages et tâtonnements*, in *Pour La Science*, pp. 94-99, avril 1990.

S. W. Golomb, *Polyominoes. Puzzles, Patterns, Problems and Packing*, Princeton Science Library, Princeton, 1994-1996.

S. W. Golomb, *Tiling Rectangles with Polyominoes*, in *The Mathematical Intelligencer*, 18, 2, pp. 38-46, 1996.

W. R. Marshall, *Packing Rectangles with Congruent Polyominoes*, in *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 77, 2, pp. 181-192, 1997.

G. E. Martin, *Polyominoes. A Guide to Puzzles and Problems in Tiling*, in *The Mathematical Association of America, Spectrum Series*, 1996.

H. K. Orman, *Pentominoes : A First Player Win*, in *Game of No Chance*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

M. Reid, *Tiling Rectangles and Half Strips with Congruent Polyominoes*, in *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 80, 1, 1997.

Steve Bronstein / Image Bank



Abrogeons la loi des moyennes

IAN STEWART

Subtilités mathématiques du jeu de pile ou face.

Jouons à pile ou face, un grand nombre de fois, avec une pièce non truquée. Pile et face ont la même probabilité, égale à $1/2$, d'apparaître à chaque lancer. Comptabilisons les résultats au fur et à mesure et supposons que, à une étape, le nombre de tirages sur face soit supérieur de 100 à celui des pile : le nombre de pile a-t-il ensuite tendance à rattraper le nombre de face ? Ceux qui jouent à pile ou face sans en connaître les arcanes mathématiques évoquent parfois une «loi des

moyennes» fondée sur l'intuition que les nombres de pile et de face obtenus avec une pièce non truquée devraient devenir peu différents après un grand nombre de lancers. Pourtant les pièces n'ont pas de «mémoire» : la probabilité d'obtenir pile ou face lors d'un lancer est toujours $1/2$. Ne devrait-on pas penser plutôt que les totaux n'ont pas de raison de devenir égaux ?

Les mêmes questions se posent dans des contextes variés. Si un accident d'avion se produit en moyenne tous les quatre mois et si trois mois se sont passés sans accident, un accident est-il imminent ?

Dans tous les cas de ce type, la réponse est non : les processus aléatoires ou, plus exactement, les modèles mathématiques de ces processus n'ont pas de mémoire.

Le problème est subtil : qu'entend-on quand on dit que «le nombre de pile rattrapera celui des face» ? Certes, une longue suite de face ne change pas la probabilité d'obtenir ensuite des pile, mais, même après une série comportant par exemple 100 face de plus que de pile, la probabilité que les nombres totaux de pile et de face deviennent ultérieurement égaux est toujours égale à 1. La probabilité d'un événement est égale à 1 quand l'événement est certain, et elle est nulle quand l'événement est impossible. Ici nous envisageons une série potentiellement infinie de lancers : le jeu peut durer aussi longtemps que le désire le joueur. Dans ce cas, les mathématiciens préfèrent dire «presque certain» ou «presque impossible».

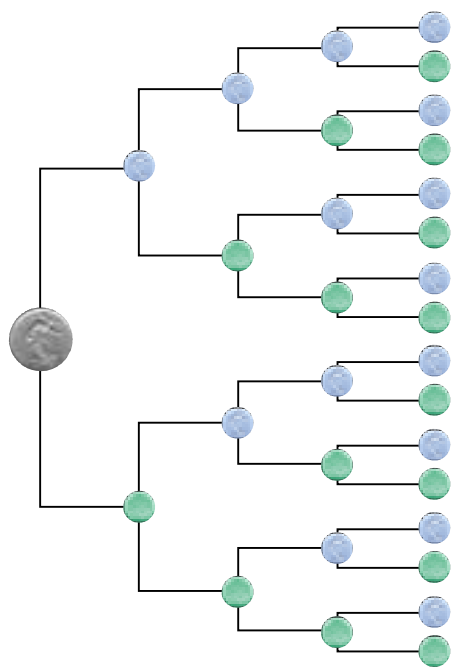
D'un autre point de vue, après une série où le nombre de face est supérieur de 100 au nombre de pile, la probabilité que, plus tard, vienne un moment où le total des face soit supérieur à celui des pile d'au moins un million est aussi égale à 1.

Pour analyser ces apparentes contradictions, examinons de plus près le jeu de pile ou face. Nous avons lancé une pièce 20 fois et avons obtenu la suite PPPFPFFFFFFFPFPFPFPF, qui comprend 11 pile (P) et 9 face (F). D'après une loi de la théorie des probabilités nommée loi des grands nombres, la fréquence d'apparition d'un événement tend vers sa probabilité quand le nombre d'expériences augmente indéfiniment. Dans la série précédente, les fréquences des événements «tirer pile» et «tirer face» sont respectivement $11/20$, soit 0,55 et $9/20$, soit 0,45. Elles sont proches de 0,5, mais pas égales à 0,5.

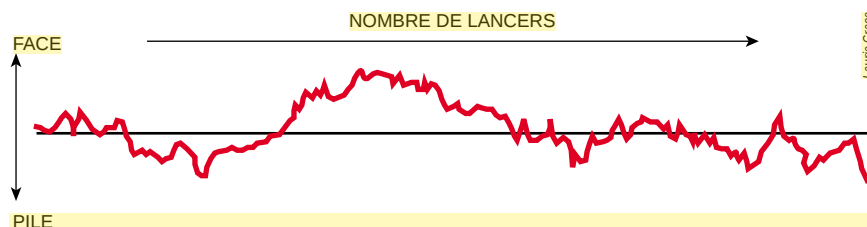
La suite précédente ne vous semble-t-elle pas assez aléatoire ? Préférez-vous FFPFPFPFPFPFPFPFPFP, où les fréquences de pile et de face sont exactement égales à 0,5 ? Cette deuxième séquence semble plus aléatoire... mais elle ne l'est pas.

La première suite ne semble pas aléatoire, car elle contient de longues chaînes du même événement, telles PPPP ou FFFFFFF. En réalité, notre intuition est trompeuse : les séquences aléatoires contiennent souvent des motifs et des répétitions, et cela ne doit pas nous étonner (à moins que face sorte à chaque coup pendant très longtemps, auquel cas la pièce a probablement deux côtés marqués face).

Lançons une pièce quatre fois de suite. La figure 1 indique les résultats possibles. Le premier lancer donne soit F, soit P (chacun avec une probabilité $1/2$). Le deuxième lancer donne encore soit F, soit P, et ainsi de suite, de sorte qu'après quatre lancers on obtient un arbre à 16 branches. D'après la théorie des probabilités, chaque chemin a une probabilité égale à $1/2 \times 1/2 \times 1/2 \times 1/2$, soit $1/16$. Remarquez que la probabilité de



1. Les résultats possibles d'une suite de quatre lancers à pile (en vert) ou face (en bleu).



2. Marche au hasard, où «face» correspond à un pas vers le haut et «pile» à un pas vers le bas. Les nombres de «face» et de «pile» totalisés depuis le début du jeu sont rarement égaux ; quand cela se produit, la courbe rouge croise l'axe des abscisses.

Laure Grace