

ne possédons parfois que les crânes de certains fossiles, tandis que nous n'avons que des carapaces pour d'autres.

Si nous avions découvert uniquement le crâne de *Palaeochersis*, nous serions parvenu à la conclusion phylogénique proposée ici. Toutefois, si nous n'avions récupéré qu'une carapace de Los Colorados, nous aurions pensé que certains pleurodires primitifs étaient présents dans le Trias d'Argentine (*Palaeochersis*) de même qu'en Allemagne (*Proterochersis*). Le bassin fusionné de *Palaeochersis* l'aurait inévitablement apparenté aux pleurodires, alors que la conclusion est différente lorsque l'on considère à la fois les caractères crâniens et postcrâniens.

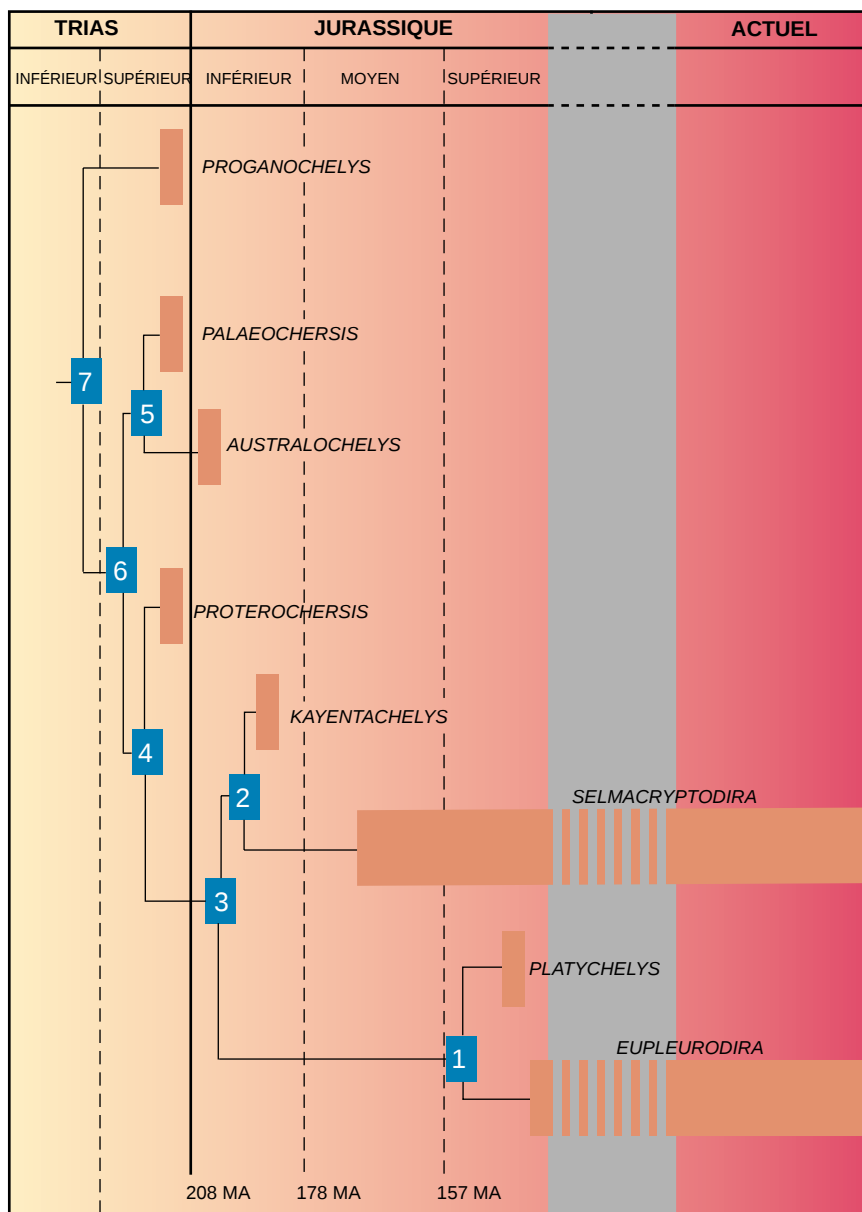
L'histoire des tortues enfin reconstituée

Nous constatons donc que, au cours de l'évolution des tortues, divers caractères sont successivement apparus, puis disparus. Par conséquent, la découverte de crânes et de squelettes associés est une condition indispensable pour élaborer des parentés entre les groupes de tortues.

Dès la fin du Trias, les tortues avaient montré des adaptations diverses dans des zones géographiques variées. Il existait trois groupes différents (*Proganochelys*, *Australochelyidae* et *Proterochersis*) qui couvraient les régions septentrionales et méridionales de la Pangée. Ce tableau du trio révèle une importante diversité écologique, avec des formes amphibies d'eau douce (*Proganochelys*) et des formes terrestres (*Proterochersis* et peut-être les *Australochelyidae*).

La faune du Trias semble très homogène, dans la mesure où des genres d'une même famille se retrouvent un peu partout. Sans remettre en cause cette affirmation, nous précisons que certaines familles sont mieux représentées dans la portion septentrionale de la Pangée triasique (tels les phytosaures) ou dans les continents du Sud (*Australochelyidae*). Cela suggère que, avant que ne se produise la scission du supercontinent Pangée, deux grandes sous-unités faunistiques s'étaient déjà différenciées.

Les caractéristiques principales des tortues se sont affirmées au Trias supérieur. Par comparaison avec les mammifères ou les dinosaures triasiques et les oiseaux, les modifications opérées depuis chez les Chéloniens



6. NOUVEL ARBRE PHYLOGÉNÉTIQUE DES TORTUES. Dès la fin du Trias, les tortues se sont diversifiées en au moins trois groupes habitant des régions septentrionales (*Proganochelys quenstedti*, *Proganochelys rucha*, *Proterochersis robusta*) et méridionales (*Palaeochersis talampayensis*) de la Pangée. Les *Australochelyidae* (*Australochelys* et *Palaeochersis*) constituent un groupe sans descendance intermédiaire dans la séquence phylogénétique entre *Proganochelys* et les autres tortues, qui n'ont pas laissé de descendants vivants. 1 = pleurodires ; 2 = cryptodires ; 3 = Casychelydia ; 4 = sans dénomination ; 5 = *Australochelyidae* ; 6 = *Rhaptochelydia* ; 7 = Testudines.

semblent constituer de légers ajustements d'un modèle ancien à l'efficacité prouvée. La diversité des groupes qui sont nés de ce plan commun, leur dispersion géographique et les divers environnements dans lesquels ils se trouvent prouvent leur faculté d'adaptation. De leur train de sénateur, les tortues ont sillonné une planète changeante pendant 200 millions d'années, alors que nombre de groupes, dont les dinosaures, ont disparu à jamais.

G. ROUGIER, Marcelo de la FUENTE et A. ARCUCCI sont spécialistes des tortues. G. ROUGIER est professeur à l'Université de Buenos Aires.

E.S. GAFFNEY et J.W. KITCHING, *The Most Ancient African Turtle*, in *Nature*, n° 369, pp. 55-58, 1994.

M.S.Y. LEE, *The Origin of the Turtle Body Plan*, in *Science*, vol. 261, pp. 1716-1720, 1993.

G.W. ROUGIER, et al, *Late Triassic Turtles from South America*, in *Science*, vol. 328, pp. 855-858, 1995.

Géométrie et religion au Japon

TONY ROTHMAN • HIDETOSHI FUKAGAWA

Quand le Japon s'isola, entre 1639 et 1854, des pratiques mathématiques originales apparurent. Notamment le peuple dédiait aux divinités des tablettes de bois ornées de problèmes géométriques.

De 1639 à 1854, quand le Japon ferma ses frontières, les idées scientifiques occidentales cessèrent de s'introduire, et les mathématiques se développèrent sans échange avec celles des autres pays du monde. C'est alors que fleurit une tradition d'une rare élégance : des samouraïs, des marchands et des paysans passionnés de mathématiques résolvaient des problèmes de géométrie variés, puis inscrivaient leurs résultats sur des tablettes de bois, qu'ils suspendaient sous les toits des édifices religieux. Selon les cas, ces *sangaku*, littéralement « tablettes mathématiques », étaient des offrandes aux divinités ou des défis aux autres visiteurs des lieux saints.

La plupart des *sangaku* traitaient de géométrie euclidienne, mais ils mentionnent des problèmes bien différents de ceux des cours de géométrie occidentaux : les cercles et les ellipses y jouent un rôle prépondérant. On considère ainsi des cercles dans des cercles, des cercles dans des ellipses, des ellipses dans des cercles... Certains de ces problèmes sont élémentaires ; d'autres sont des casse-tête dont la résolution nécessite des techniques avancées, notamment de calcul intégral ou de géométrie affine. La plupart de ces problèmes appartiennent aujourd'hui à la catégorie des mathématiques récréatives ou pédagogiques, mais certains résultats inscrits sur les tablettes votives japonaises anticipaient des résultats qui ne furent découverts qu'ultérieurement en Occident : le problème de Malfatti (inscrire dans un triangle trois

cercles tangents entre eux deux à deux et tangents chacun à deux côtés du triangle), le théorème de Casey (trouver la relation entre les rayons de quatre cercles tangents à un cinquième cercle ou à une droite), le théorème des six sphères de Soddy (voir la page 56) ou le théorème des cercles de Descartes (trouver la relation entre les rayons de quatre cercles tangents deux à deux) furent démontrés au Japon avant de l'être en Occident. Nombre de tablettes votives japonaises tiennent autant de l'œuvre d'art que de la publication mathématique.

Mathématiques divines

Comment cette pratique est-elle apparue ? Et quand ? L'accrochage de tablettes votives aux toits des sites religieux se pratiquait depuis plusieurs siècles quand apparurent les premiers *sangaku*. Le shintoïsme, religion officielle du Japon jusqu'en 1945, est un polythéisme qui admet « huit cents myriades de dieux », les *kamis*. Ces derniers, disait-on, aimaient les chevaux, et les fidèles trop pauvres pour leur offrir un cheval vivant pouvaient, à la place, en offrir une représentation dessinée sur bois. Aussi, jusqu'au XV^e siècle, les tablettes votives représentaient souvent des chevaux.

Le plus ancien *sangaku* connu, découvert dans la préfecture de Tochigi,

date de 1683. On a également trouvé, à Tokyo, une deuxième tablette datant de 1686, puis une troisième datant de 1691. Au XIX^e siècle, le mathématicien japonais Kazu Yamaguchi consigna dans son journal de voyage la description d'une tablette encore plus ancienne, qui aurait été réalisée en 1668. Les historiens estiment que la tradition des *sangaku* date de la seconde moitié du XVII^e siècle.

Le premier recueil de problèmes de *sangaku* fut publié en 1789. D'autres recueils parurent aux XVIII^e et XIX^e siècles. Écrits à la main ou imprimés à partir de matrices en bois, ces ouvrages sont très beaux. Plus de 880 tablettes qui subsistent aujourd'hui font elles-mêmes référence à des centaines d'autres tablettes qui figurent dans divers recueils. Un recensement des *sangaku* existants révèle que tous les milieux, urbains ou ruraux, pratiquaient la tradition de ces ex-voto mathématiques ; toutefois ces tablettes sont deux fois plus nombreuses dans les lieux de culte shintoïste que dans les temples bouddhistes.

La plupart des *sangaku* conservés contiennent plusieurs théorèmes et sont souvent ornés de couleurs brillantes. Les théorèmes sont généralement livrés sans démonstration. À côté du résultat figurent le nom de l'auteur et la date de l'offrande. Les problèmes ne traitent pas uni-

1. AU JAPON, de nombreux lieux de pèlerinages shintoïstes et bouddhistes abritent des *sangaku* : ces tablettes votives étaient traditionnellement suspendues sous les avant-toits des édifices religieux. Les problèmes consignés sur les *sangaku* traitent presque toujours de géométrie. Nombre de ces tablettes sont délicatement peintes ; certains problèmes ont été inscrits en idéogrammes dorés.



Photographies d'Hiroshi Umeda

quement de géométrie. Certains, qui calculent le volume de solides, imposent l'usage du calcul intégral, de sorte qu'on peut se demander quelles techniques étaient connues et utilisées par les Japonais. Nous examinerons plus loin cette question. D'autres tablettes proposent des équations diophantiennes, c'est-à-dire des équations algébriques dont on cherche des solutions en nombres entiers.

Aujourd'hui, les *sangaku* n'intéressent plus que quelques passionnés des mathématiques japonaises traditionnelles, et, parmi eux, Hidetoshi Fukagawa, un enseignant de lycée dans la préfecture d'Aichi (à mi-chemin entre Tokyo et Osaka). Il y a une trentaine d'années, H. Fukagawa décida d'étudier l'histoire des mathématiques japonaises, afin d'enrichir son enseignement. La mention de ces tablettes mathématiques, dans un vieil ouvrage trouvé en bibliothèque, le surprit, car il ignorait l'existence de tels objets. Depuis, H. Fukagawa parcourt le Japon à la recherche de ces tablettes et il est devenu un expert en *sangaku*, mais aussi en histoire des mathématiques japonaises traditionnelles.

Pour ses recherches, H. Fukagawa a dû apprendre le *kambun*, du chinois classique augmenté de signes qui facilitent la lecture par les Japonais. Équivalent japonais du latin, le *kambun* était la langue scientifique de la période d'Edo (1603-1867). H. Fukagawa est mis à contribution chaque fois que l'on découvre de nouvelles tablettes.

Les origines d'une tradition

Si l'origine des *sangaku* ne peut être datée avec précision, elle peut être localisée. En japonais, le mot *wasan* désigne les mathématiques développées au Japon, par opposition au *yosan*, qui désigne les mathématiques occidentales. L'histoire des mathématiques japonaises ancienne explique comment le *wasan* et la curieuse coutume du *sangaku* sont apparus.

Au milieu du VI^e siècle, le bouddhisme s'introduisit au Japon, ainsi que les mathématiques chinoises. Dès le début du VIII^e siècle, le Japon avait importé les grands classiques chinois sur l'arithmétique, l'algèbre et la géométrie. Le plus ancien de ces ouvrages est le *Chou-pei Suan-ching*, qui contient le théorème de Pythagore et la figure habituellement associée à

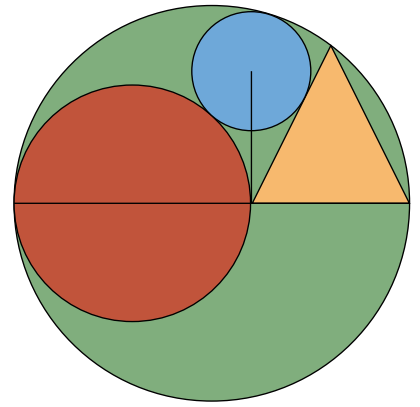
sa démonstration. Cette partie de l'ouvrage date au moins du VI^e siècle avant notre ère.

L'ouvrage intitulé *Chiu-chang Suan-shu*, qui fut le document chinois le plus important pour le développement des mathématiques japonaises, montre un état de connaissances plus avancé : il indique comment déterminer l'aire de triangles, de cercles et d'autres figures, et il résout des problèmes analogues à ceux des écoles d'aujourd'hui (Si cinq bœufs et deux moutons coûtent huit taels d'or, et si deux bœufs et huit moutons coûtent huit taels, combien coûte chaque animal?). La majeure partie de l'ouvrage fut certainement rédigée au III^e siècle avant notre ère : ainsi ce document serait le plus ancien à mentionner des nombres négatifs et à étudier une équation du second degré (certains historiens des mathématiques pensent toutefois que les Égyptiens avaient abordé les équations du second degré dès le troisième millénaire avant notre ère).

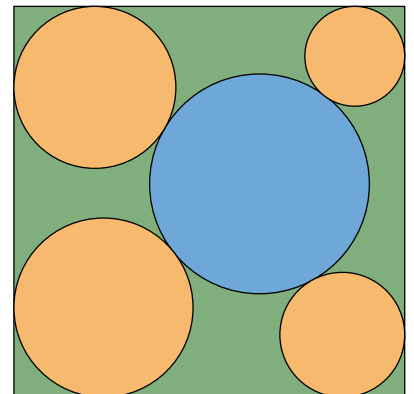
Malgré l'apport chinois, les mathématiques ne prirent pas racine au Japon. Le pays connut même une période d'obscurantisme quand l'Europe occidentale vivait son Moyen Âge. Comme les églises et les monastères européens, les temples bouddhistes devinrent les seuls centres culturels, même si les mathématiques ne semblent pas y avoir joué un rôle majeur. Durant le shogunat des Ashikaga (1338-1573), le Japon n'avait plus d'expert en division.

Les mathématiques japonaises ne naquirent véritablement qu'au début du XVII^e siècle. Un certain Shigeyoshi Mori fut particulièrement productif aux alentours de 1600. Bien qu'une seule de ses œuvres – un simple opuscule – nous soit parvenue, on sait qu'il développa le calcul sur le *soroban*, le boulier japonais, et fit connaître ce type de calcul dans le pays.

Un de ses élèves, Mitsuyoshi Yoshida (1598-1672), a laissé un ouvrage important. Ce document intitulé *Jinko-ki* (littéralement, «Des nombres grands et petits») fut publié en 1627. Il traite également du calcul sur le *soroban*, et son influence fut telle que son titre fut longtemps synonyme d'arithmétique : les mathématiciens japonais s'intéressèrent plus au calcul qu'à la logique. Mori et Yoshida furent ainsi les pères des mathématiques japonaises.



Dans ce problème, qui provient d'un *sangaku* datant de 1803 et trouvé dans la préfecture de Gumma, la base d'un triangle isocèle repose sur un diamètre du grand cercle vert. En outre, ce diamètre partage en deux le cercle rouge intérieurement tangent au cercle vert et en contact avec le sommet du triangle. Le cercle bleu est tangent au triangle et au cercle rouge, et intérieurement tangent au cercle vert. Un segment de droite relie le centre du cercle bleu au point de contact du cercle rouge et du triangle. Montrer que ce segment est perpendiculaire au diamètre du cercle vert.



Ce problème provient d'une tablette de 1874 trouvée dans la préfecture de Gumma. Un grand cercle bleu se trouve dans un carré. Quatre petits cercles orange, de rayons différents, sont tangents d'une part au cercle bleu, d'autre part aux côtés du carré. Quelle relation unit les rayons des quatre cercles et le côté du carré (indication : ce problème peut se résoudre par le théorème de Casey, qui donne la relation entre quatre cercles tangents à un cinquième cercle ou à une droite)?