

Isolement et géométrie

Les mathématiques qui s'affichèrent sur les *sangaku* furent toutefois l'œuvre de nombreux individus, et non celle d'une élite. En 1639, le shogunat des Tokugawa (durant la période d'Edo) décréta de fermer les frontières du Japon afin de renforcer son pouvoir. Durant cette période de *sakoku*, de «fermeture du pays», le gouvernement proscrivit les ouvrages étrangers, interdit les voyages à l'étranger, persécuta les chrétiens et interdit l'accostage des navires portugais et espagnols. L'isolement persista durant plus de deux siècles, jusqu'à ce que le capitaine Matthew Perry, à la tête d'une flotte de guerre américaine, oblige le Japon à mettre fin à son *sakoku*, en 1854.

L'isolement du pays eut quelques avantages : la fin du XVII^e siècle fut une renaissance, ou *Genroku*. Les arts du *haiku*, des théâtres *no* et *kabuki* atteignirent leur apogée ; l'*ukiyo-e*, l'art des peintures d'un «monde flottant», apparut ; la cérémonie du thé et l'art du bouquet se développèrent, tandis que les mathématiques prospéraient autour de Takakazu Seki (1642-1708).

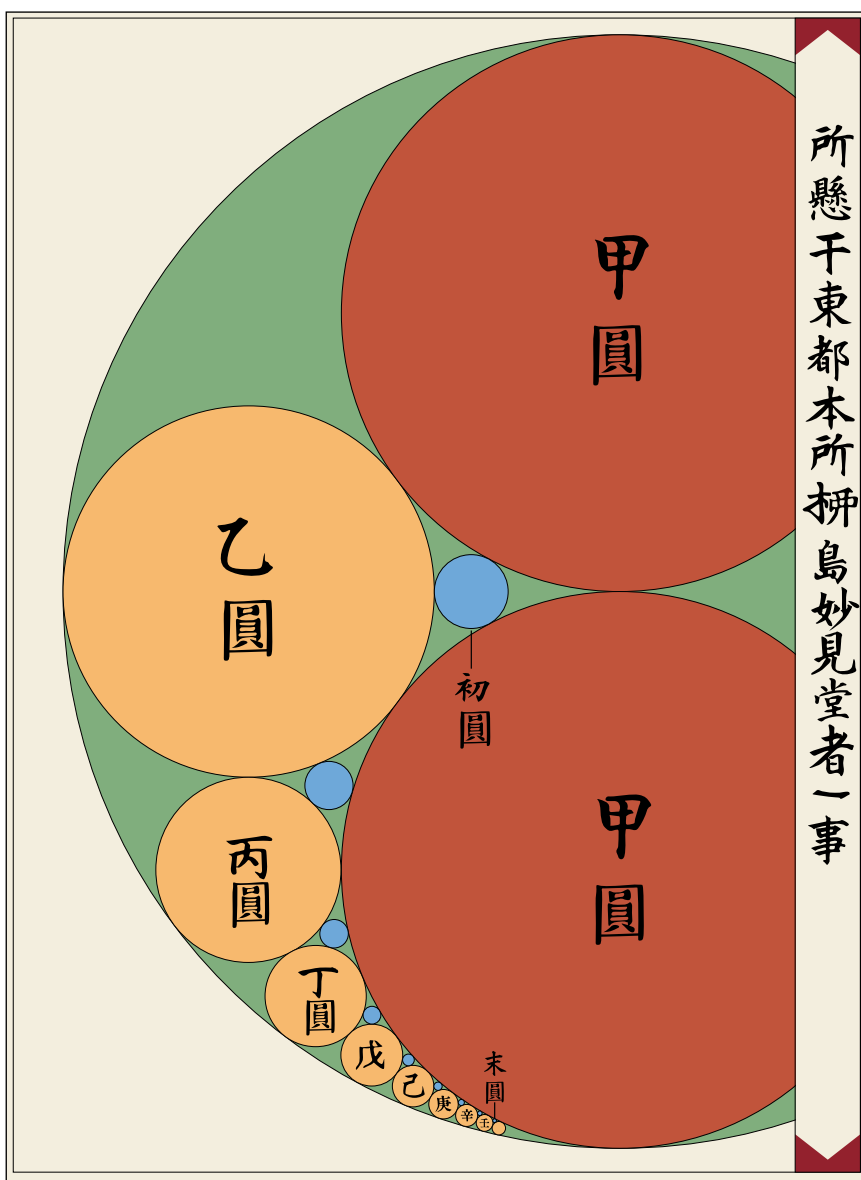
Au Japon, Seki est aussi connu qu'Isaac Newton ou Antoine Laurent de Lavoisier en Europe. On lui a attribué un très grand nombre de manuscrits et l'on sait qu'il forma de nombreux élèves, qui développèrent les mathématiques japonaises.

Le premier accomplissement de Seki fut sa théorie des déterminants, qui est plus puissante que celle de Gottfried Wilhelm Leibniz et la précède d'au moins une décennie. Il trouva également des méthodes pour résoudre des équations de degré élevé (une grande partie des mathématiques traditionnelles japonaises de cette époque concerne des équations de degré atteignant plusieurs centaines ; l'une d'elles est de degré 1 458). Enfin Seki semble avoir été à l'origine de l'*enri*, ou «principe du cercle».

L'*enri* était un champ de recherches mathématiques qui s'est développé après Seki. À la base, il utilise des méthodes analogues à celles qu'employaient Eudoxe et Archimède pour calculer l'aire des cercles : à l'aide de polygones à n côtés, on approche la circonférence du cercle et l'on utilise de telles approximations pour calculer des aires et des volumes, par exemple. Ainsi l'*enri* fut une forme de calcul intégral, appliquée ensuite à d'autres figures,



Hiroshi Umeda



Bryan Christie, d'après Toshitaka Iwasaki

2. LES PLAQUETTES VOTIVES accrochées dans les temples japonais (*en haut*) mentionnent souvent des problèmes mathématiques où figurent des cercles emboîtés ou des sphères inscrites à l'intérieur d'autres figures. Le problème reproduit en bas figurait sur une plaquette votive peinte en 1788, dans la préfecture de Tokyo. On cherche le rayon du n -ième cercle bleu en fonction du rayon r du cercle vert. Les deux cercles rouges sont identiques et leur rayon est égal à $r/2$ (indication : le rayon du cinquième cercle bleu est égal à $r/95$). La solution de ce problème fait intervenir l'équivalent japonais du théorème des cercles de Descartes, qui détermine la relation entre les rayons de quatre cercles tangents deux à deux ; elle est donnée page 58.

telles les sphères et les ellipses. Les techniques de l'*enri* ont été mises en œuvre dans la réalisation de *sangaku*.

Des sphères dans des ellipsoïdes

Les premiers livres utilisant l'*enri* et les premiers *sangaku* attestés sont contemporains de Seki. Il ne s'agit pas là d'une coïncidence : les disciples de Yoshida et de Seki contribuèrent probablement au développement du *wasan* en même temps qu'ils en subissaient l'influence.

Certains racontent que Seki a rencontré son premier *sangaku* alors qu'il se rendait au château du shogun, dont il était le mathématicien officiel ; les tablettes votives l'auraient incité à approfondir ses recherches. Est-ce une légende ?

On ne le saura sans doute jamais, mais, au siècle suivant apparurent des livres contenant des problèmes typiquement japonais, mettant en jeu des cercles à l'intérieur de triangles, des

sphères à l'intérieur de pyramides, des ellipsoïdes entourant des sphères... Les problèmes trouvés dans ces ouvrages diffèrent peu de ceux qui ont été retrouvés sur les tablettes, les historiens ont conclu que l'engouement pour tous les problèmes de *wasan* – et la vogue des *sangaku* – résulta de la politique d'autarcie du Japon.

Cette autarcie fut-elle totale ? À l'exception des Hollandais, autorisés à accoster dans le port de Nagasaki, sur l'île méridionale de Kyushu, tous les commerçants occidentaux étaient interdits de séjour. De surcroît, les déplacements des Japonais étaient sévèrement limités : un voyage à l'étranger était un acte de trahison, passible de la peine de mort. L'autarcie fut suffisamment complète pour minimiser l'influence des mathématiques étrangères sur les mathématiques japonaises.

En revanche, au XIX^e siècle, le *wasan* fut progressivement supplanté par le *yosan*. Apparurent alors des manus-

crits mêlant des textes en *kambun* et des notations mathématiques occidentales. Puis, après l'ouverture du Japon et l'effondrement du shogunat des Tokugawa, en 1867, le nouveau gouvernement adopta le *yosan* et délaissa les mathématiques locales. Certains praticiens du *wasan* continuèrent de suspendre des tablettes (quelques *sangaku* datent même de la dernière décennie), mais la quasi-totalité des problèmes proposés durant le XX^e siècle sont des plagats.

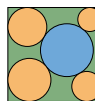
Qui étaient les auteurs des *sangaku* ? Les théorèmes merveilleusement dessinés sur les tablettes votives étaient-ils l'œuvre de mathématiciens professionnels ou de simples amateurs ? La question est difficile. Le traité d'histoire des mathématiques japonaises de David Smith et de Yoshio Mikami ne mentionne que quelques *sangaku*. Il cite le recueil *Shimpeki Sampo* («Problèmes mathématiques suspendus devant le temple»), publié en 1789 par le mathématicien profes-

Réponses aux problèmes de sangaku

Nous ne donnons ici que l'indication des solutions. Les lecteurs intéressés trouveront les solutions détaillées sur le site Internet de la revue *Pour la Science*, à l'adresse <http://www.pourlascience.com>.

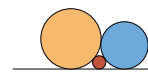


Réponse : Dans sa solution, l'auteur du problème trace un segment de droite qui passe par le centre du cercle bleu et qui est perpendiculaire au diamètre du cercle vert. Il suppose ensuite que ce segment est différent du segment décrit dans l'énoncé du problème. Ainsi, ces deux segments devraient couper le diamètre tracé en deux points différents. Il montre ensuite que la distance entre ces deux points est nécessairement nulle : autrement dit, les deux segments sont identiques et, donc, perpendiculaires au diamètre du cercle vert.



Réponse : Si a désigne le côté du carré et r_1, r_2, r_3 et r_4 sont respectivement les rayons des cercles supérieur droit, supérieur gauche, inférieur gauche et inférieur droit, alors :

$$a = \frac{2(r_1 r_3 - r_2 r_4) + \sqrt{2(r_1 - r_2)(r_1 - r_4)(r_3 - r_2)(r_3 - r_4)}}{r_1 - r_2 + r_3 - r_4}$$



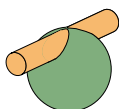
Réponse : $1/\sqrt{3} = 1/\sqrt{r_1} + 1/\sqrt{r_2}$, où r_1, r_2 et r_3 sont respectivement les rayons des cercles orange, bleu et rouge. On peut résoudre le problème à l'aide du théorème de Pythagore.



Réponse : $PQ = \sqrt{27} a^2 b^2 / (a^2 + b^2)^{3/2}$. On peut résoudre ce problème à l'aide de la géométrie analytique : on cherche une équation pour PQ ; puis on prend la dérivée de cette équation et on l'égale à zéro pour obtenir la valeur minimale de PQ. On ignore si les premiers auteurs de ce problème l'ont résolu en recourant au calcul différentiel.



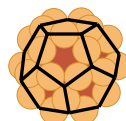
Réponse : $r_2^2 = r_1 r_3$, où r_1, r_2 et r_3 sont respectivement les rayons des grand, moyen et petit cercles bleus (autrement dit, r_2 est la moyenne géométrique de r_1 et r_3). On peut résoudre le problème en observant que les triangles verts délimités par les carrés orange sont tous semblables. La solution, telle qu'elle fut initialement proposée, consiste alors rechercher la relation unissant les trois carrés.



Réponse : $16t \sqrt{t(r-t)}$, où r et t sont respectivement les rayons de la sphère et du cylindre.



Réponse : Six sphères. Le théorème des six sphères de Soddy stipule que le nombre de sphères est égale à six. Curieusement, les rayons $t_1, t_2, \dots, t_6$ des diverses sphères bleues qui composent le collier sont liés par les relations : $1/t_1 + 1/t_4 = 1/t_2 + 1/t_5 = 1/t_3 + 1/t_6$.



Réponse : $R = \sqrt{5r}$, où R et r sont respectivement les rayons de la grande sphère et des petites sphères. On peut résoudre le problème en observant que le centre de chaque petite sphère se trouve au milieu d'une arête de dodécaèdre régulier – un solide régulier à douze faces pentagonales.



Réponse : $r / [(2n - 1)^2 + 14]$. La solution originelle de ce problème fait intervenir à plusieurs reprises la version japonaise du théorème du cercle de Descartes. On peut toutefois utiliser l'inversion, qui était à l'époque inconnue des mathématiciens japonais.